

Der kanonische Formalismus in entarteten Fällen

Von Rudolf Haag in München

Für Fälle, in denen die Gleichungen $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ nicht nach den Geschwindigkeiten auflösbar sind, wird der kanonische Formalismus formuliert. Er führt auf Systeme mit überzähligen Variablen. Ihre Reduktion und die Frage nach dem Sinn von Poissonklammerrelationen in solchen Systemen wird im 2. Teil besprochen.

The "canonical formalism" is formulated for the case, that the equations $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ cannot be solved for the velocities \dot{q}_α . It leads to a system with odd variables. The second part deals with the reduction of the system and discusses the meaning of the relations between the Poisson brackets.

Pour des cas, auxquels les équations $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ ne sont pas résolubles vers les vitesses, le formalisme canonique est formulé. Il conduit à des systèmes à variables surnuméraires. Leur réduction et la question concernant le sens de relations en parenthèse d'après Poisson dans tels systèmes est discutée dans la seconde partie.

На случай, когда уравнения $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ не разрешимы относительно скоростей, формулируется канонический формализм. Он приводит к системам с избыточными переменными. Их приведение, а также вопрос о смысле отношений в скобках Пуассона в таких системах обсуждаются во второй части.

1. Übergang zum kanonischen Formalismus

Es sei die Bewegungsgleichung eines mechanischen Systems in Form des Variationsprinzips

$$\delta \int L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) ds = 0; \quad (\alpha = 1 \dots n) \dots \dots \dots (1)$$

gegeben. Dann kann der Übergang zur Hamiltonfunktion und den kanonischen Bewegungsgleichungen Schwierigkeiten bereiten, wenn die Legendre-Transformation

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dots \dots \dots (2a),$$

$$H_0 = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L^1) \dots \dots \dots (2b)$$

nicht gestattet, die Geschwindigkeiten \dot{q}_α als Funktionen der Impulse auszudrücken, wenn also die Funktionaldeterminante $\frac{\partial^2 L}{\partial q_\alpha \partial \dot{q}_\beta}$ verschwindet. Gesetzt den Fall, sie haben den Rang $(n-r)$, dann werden durch (2) gerade $(n-r)$ der Größen \dot{q}_α als Funktionen der p_α und der restliche Geschwindigkeitskomponenten ausdrückbar sein. Dafür werden r Beziehungen zwischen Impulsen und Ortskoordinaten bestehen:

$$\Phi_i(p_\alpha, q_\alpha) = 0; \quad (i = 1 \dots r) \dots \dots \dots (3).$$

Wie bestimmt sich nun die Hamilton-Funktion in einem solchen Fall? Zunächst bemerken wir, daß obgleich die \dot{q}_α nicht vollständig durch p_α, q_α ausdrückbar sind, der Übergang (2b) zu $H_0(p_\alpha, q_\alpha)$ stets möglich ist, denn das vollständige Differential von H_0 ergibt sich auch hier zu

$$dH_0 = \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \dots \dots \dots (4).$$

Da wir alle Größen als Funktionen von p_α, q_α und etwa \dot{q}_i ($i = 1 \dots r$) ausdrücken können, H_0 sich aber bei Konstanthalten der p_α, q_α nicht ändert, folgt, daß es unabhängig von \dot{q}_i sein muß. D. h. aber: H_0 ist durch die p_α, q_α allein ausdrückbar. Wegen der Beziehungen (3) ist dies allerdings auf mannigfache Weise möglich. Aus (4) folgen also nicht mehr die kanonischen Bewegungsgleichungen. Vielmehr ist

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha} + \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_\alpha}, \dots \dots \dots (5a),$$

$$\dot{p}_\alpha = - \frac{\partial H_0}{\partial q_\alpha} - \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_\alpha} \dots \dots \dots (5b),$$

¹⁾ Wir verwenden durchweg die „Summenkonventionen“: über Indizes, die in einem Glied doppelt vorkommen wird summiert.

wobei die λ_i zunächst unbestimmte Lagrangesche Multiplikatoren sind. Gehen wir von irgend einer der möglichen Darstellung für H_0 aus, so erscheinen die Gl. (5) in der üblichen Form kanonischer Gleichungen, wenn wir

$$H = H_0 + \lambda_i \Phi_i \quad \dots \dots \dots (6)$$

setzen und außer den zugehörigen kanonischen Gleichungen noch die Nebenbedingungen (3) fordern. Dieser formale Prozeß ist aber nur dann von Nutzen, wenn wir über die Multiplikatoren λ_i etwas aussagen können. Zu diesem Zweck beachten wir, daß nach (3) auch $\dot{\Phi}_i$ verschwinden muß. Also

$$\{H_0, \Phi_i\} + \lambda_i \{\Phi_i, \Phi_j\} = 0 \quad \dots \dots \dots (7).$$

Soweit die Klammern $\{\Phi_i, \Phi_j\}$ nicht sämtlich verschwinden, ergeben sich hieraus Bestimmungsgleichungen für die λ_i . Das System (7) wird aber im allgemeinen nicht sämtliche λ_i festlegen, sondern einige Gleichungen liefern, die von den Multiplikatoren frei sind. Sie sind entweder Identitäten oder neue Nebenbedingungen, etwa

$$\psi_\varrho(p_\alpha, q_\alpha) = 0 \quad (\varrho = 1 \dots s) \quad \dots \dots \dots (8).$$

Wiederholt man mit ihnen das Spiel, so kommt man schließlich zu dem vollständigen³⁾ System von Nebenbedingungen und einer mehr oder weniger weitgehenden Festlegung der Multiplikatoren.

Es gilt nun aber der folgende Satz:

Die aus (6) folgenden kanonischen Gleichungen enthalten — zusammen mit den Nebenbedingungen (3) — alle Aussagen über die Bewegung, welche in den Euler-Lagrangeschen Gleichungen des Variationsproblems enthalten sind.

Um dies einzusehen muß man sich nur davon überzeugen, daß aus den Gln. (5a) und (3) die p_α und λ_i als Funktionen der q_α, \dot{q}_α bestimmbar sind⁴⁾. Dies zeigt man aber für die p_α , indem man wieder durch Legendre-Transformation von H zu L zurückgeht. Man kommt dabei auf Gl. (2a), wenn man beachtet, daß die \dot{q}_α alle unabhängig sind, sofern nur die Gln. (5a) und (3) berücksichtigt werden und nicht auch die Bewegungsgleichungen (5b) und die daraus fließenden Kenntnisse über die λ_i (Gl. (7) usw.). Daß schließlich die λ_i durch die \dot{q}_α ausdrückbar sind, erkennt man am einfachsten, wenn man die Nebenbedingungen (3) in einer, nach r Impulsen p_i , aufgelösten Form einsetzt:

$$\begin{aligned} p_i - f_i(p_\varrho, q_\alpha) &= 0 & i &= 1 \dots r; & s &= r + 1 \dots n \\ H_0 &= H_0(p_\varrho, q_\alpha). \end{aligned}$$

Dann liefert (5a) direkt:

$$\dot{q}_i = \lambda_i.$$

Wenn nun die Bedingungen $\dot{\Phi}_i = 0, \ddot{\Phi}_i = 0$ usw. noch einige der Multiplikatoren unbestimmt lassen, so folgt, daß jede Wahl dieser Multiplikatoren mit den Bewegungsgleichungen verträglich ist. Die Bewegungsgleichungen plus Anfangsbedingungen bestimmen die Funktionen $q_\alpha(s)$ nicht vollständig. Einige bleiben willkürlich wählbar. Wenn andererseits der physikalische Sachverhalt ein wohlbestimmter ist, so bedeutet dies, daß die Größen q_α und s nicht sämtliche eine selbständige physikalische Bedeutung haben.

Ein häufiges Beispiel ist der Fall der „Parameterinvarianz“: Das Extremalprinzip ist invariant gegen eine beliebige Änderung des Zeitparameters $s \rightarrow f(s)$. In diesem Fall ist s physikalisch belanglos. Dies wirkt sich auf die Hamiltonfunktion so aus, daß sie nur bis auf einen beliebigen Faktor bestimmt ist. Ein anderes Beispiel:

$$L = \frac{1}{2} [q_\alpha^2 \dot{q}_\alpha^2 - (q_\alpha \dot{q}_\alpha)^2] \quad \dots \dots \dots (9).$$

Hier besteht Invarianz gegen die Transformation

$$q_\alpha \rightarrow \bar{q}_\alpha = \sqrt[4]{f'(s)} q_\alpha; \quad s \rightarrow \bar{s} = f(s).$$

²⁾ Unter $\{A, B\}$ verstehen wir die Poissonklammer von A und B .

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial p_\alpha} \frac{\partial B}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} \frac{\partial B}{\partial p_\alpha}.$$

³⁾ Das System ist vollständig, wenn alle weiteren Differentiationen zu Identitäten führen.

⁴⁾ Denn dann liefert (5b) nach Elimination von p_α und λ_i die Euler-Lagrangeschen Gleichungen.

In diesem Fall haben also die Verhältnisse der Koordinaten und das Differential $\frac{ds}{(q_\alpha^2)^2}$ invariante Bedeutung.

Es ist vielleicht von Nutzen, die obige, etwas formale Schlußweise noch zu ergänzen. Wir beschränken uns auf den Fall $r = 1$. Es soll also die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right|$$

den Rang $(n - 1)$ besitzen. Anders ausgedrückt: Es existieren (bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmte) Funktionen $c_\alpha(q, \dot{q})$ so daß

$$c_\alpha \frac{\partial p_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} = c_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta} = 0 \quad \dots \quad (10)$$

Der Differentialoperator

$$X = c_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad \dots \quad (11)$$

hat dann die Eigenschaft, daß er alle Größen vernichtet, die sich als Funktionen von p_α, q_α allein ausdrücken lassen. Die c_α sind einerseits die Unterdeterminanten einer Zeile der Funktionalmatrix, andererseits stehen sie in engem Zusammenhang mit der Funktion Φ von Gl. (3) (s. Gl. (16)).

Aus den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \ddot{q}_\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad \dots \quad (12)$$

erhält man durch Multiplikation mit c_α eine Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$c_\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta - c_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \dots \quad (13).$$

Diese Gleichung ist identisch mit $\dot{\Phi} = 0$. Da nämlich

$$\Phi \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, q_\alpha \right) = 0$$

identisch in q_α und \dot{q}_α erfüllt ist, folgt durch Differentiation nach \dot{q}_β :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta} = 0 \quad \dots \quad (14)$$

und durch Differentiation nach q_β

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_\beta} = 0 \quad \dots \quad (15).$$

Vergleich von (14) und (10) zeigt zunächst, daß bis auf einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor

$$c_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha} \quad \dots \quad (16).$$

Setzt man dies in (13) ein und beachtet (15) und die Bewegungsgleichung $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha$ so entsteht:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial p_\beta} \dot{p}_\beta \equiv \dot{\Phi} = 0.$$

Aus dieser Bedeutung der Gl. (13) ersieht man insbesondere, daß die linke Seite eine Funktion von p_α und q_α allein ist, nämlich die Größe $-\{H_0, \Phi\}$.

Durch Anwendung des Operators X läßt sich dies auch direkt verifizieren. Es ist

$$c_\gamma \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\gamma} \left(c_\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta - c_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) = c_\gamma c_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\gamma} \dot{q}_\beta \right) + c_\gamma c_\alpha \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\gamma} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\gamma \partial q_\alpha} \right) + c_\gamma \frac{\partial c_\alpha}{\partial \dot{q}_\gamma} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right).$$

Der zweite Term verschwindet wegen der Antisymmetrie der Klammer. Den ersten Term schreiben wir

$$c_\gamma \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(c_\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\gamma} \dot{q}_\beta \right) - c_\gamma \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\gamma} \dot{q}_\beta \frac{\partial c_\alpha}{\partial q_\beta}.$$

Beide Ausdrücke verschwinden wegen (10). Schließlich verschwindet der dritte Term, wenn man $c_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha} = c_\alpha(p, q)$ setzt, wegen der Eigenschaft des Operators X .

Wir haben also den folgenden Sachverhalt, wenn wir q_α, \dot{q}_α als unabhängige Variable betrachten: Die Gleichung $\Phi = 0$ ist identisch erfüllt. $\dot{\Phi} = 0$ ist gleichbedeutend mit der Differentialgleichung 1. Ordnung (13). Die Bewegungsgleichungen (12) lassen Auflösung nach

$$\ddot{q}_s = \ddot{q}_s(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \ddot{q}_1); \quad (s = 2 \dots n)$$

zu An Stelle einer Aussage über \ddot{q}_1 hat man zunächst die Gl. (13). Ihre Differentiation gibt wiederum keine Aussage über \ddot{q}_1 , sondern eine weitere Gleichung 1. Ordnung, da die linke Seite als Funktion von p_α, q_α darstellbar ist, und $\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ nur die ersten Ableitungen enthält.

Esgibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder $\ddot{\Phi}$ ist ebenfalls als Funktion der p und q darstellbar. Dann liefern die Differentiation wieder eine Gleichung 1. Ordnung. Oder aber $\ddot{\Phi}$ enthält neben p, q noch \dot{q}_1 . Dann liefert die Differentiation die gesuchte Aussage über \ddot{q}_1 . Bei der fortgesetzten Differentiation der Gl. $\Phi = 0$ ergibt sich also eine Folge von Differentialgleichungen 1. Ordnung, d.h. Einschränkungen für die Anfangsbedingungen. Die Folge endet entweder dadurch, daß schließlich eine Identität resultiert. In diesem Fall ist die Funktion \ddot{q}_1 willkürlich wählbar. Oder es ergibt sich schließlich eine Gleichung 2. Ordnung durch die \ddot{q}_1 als Funktion der q_α, \dot{q}_α festgelegt wird. Im kanonischen Formalismus ist dies der Fall, in dem der Multiplikator bestimmbar ist.

Wir wollen diese Beziehungen nochmals an Hand des Beispiels (9) verfolgen. Aus

$$L = \frac{1}{2} [q_\mu^2 \dot{q}_\alpha^2 - (q_\alpha \dot{q}_\mu)^2]$$

folgt

$$p_\alpha = q_\mu^2 \dot{q}_\alpha - (q_\mu \dot{q}_\mu) q_\alpha.$$

Zwischen den p_α, q_α besteht die Beziehung

$$\Phi \equiv p_\alpha q_\alpha = 0 \dots \dots \dots (17).$$

Legendre-Transformation führt zu der Hamiltonfunktion

$$H_0 = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = L - \frac{1}{2} \frac{p_\alpha^2}{q_\beta^2}.$$

Die vollständige Hamiltonfunktion lautet also

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_\alpha^2}{q_\beta^2} + \lambda \cdot (p_\alpha q_\alpha) \dots \dots \dots (18).$$

Differentiation von (17) liefert

$$\{H, \Phi\} = \frac{2}{q_\beta^2} p_\alpha^2 = 0$$

oder

$$p_\alpha^2 = 0 \dots \dots \dots (19).$$

Differentiation von (19) liefert nichts Neues mehr. Der Multiplikator bleibt also unbestimmt.

Gehen wir andererseits von den Bewegungsgleichungen aus:

$$q_\mu^2 \ddot{q}_\alpha - (q_\mu \ddot{q}_\mu) q_\alpha + 2(q_\mu \dot{q}_\mu) \dot{q}_\alpha - 2(\dot{q}_\mu^2) q_\alpha = 0 \dots \dots \dots (20),$$

so folgt durch Multiplikation mit $\frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha} = q_\alpha$ die Gleichung 1. Ordnung

$$(q_\mu \dot{q}_\mu)^2 - (q_\mu^2) (\dot{q}_\mu^2) = -2L = 0 \dots \dots \dots (19a).$$

Sie entspricht, wie wir oben allgemein zeigten der Gl. $\dot{\Phi} = 0$ (19). Differentiation der Gl. (19a) liefert nichts Neues, sondern eine Konsequenz von Gl. (20). Die Bewegungsgleichungen lassen sich schreiben

$$\ddot{q}_\alpha = - \frac{2(q_\mu \dot{q}_\mu)}{(q_\mu^2)} \dot{q}_\alpha + A q_\alpha \dots \dots \dots (20a),$$

wobei A eine willkürlich wählbare Funktion ist. Die möglichen Anfangsbedingungen werden durch (19a) eingeschränkt.

2. Reduktion der Variablensätze und Poissonklammerrelationen

Gegeben eine Hamiltonfunktion $H(p_\alpha, q_\alpha)$ und eine Anzahl von Nebenbedingungen

$$\Phi_i(p_\alpha, q_\alpha) = 0.$$

Wir wollen übergehen zu einer geringeren Zahl von Variablen die unabhängig sind ⁵⁾.

Es bestehe also eine umkehrbare eindeutige Beziehung

$$p_\alpha, q_\alpha \longleftrightarrow P_s, Q_s, \Phi_i.$$

Ihr zufolge entspricht

$$H(p_\alpha, q_\alpha) \rightarrow \bar{H}(P_s, Q_s).$$

Die Bedingung dafür, daß die kanonischen Gleichungen in den beiden Variablensystemen äquivalent sind, ist, wie man leicht nachrechnet:

$$\frac{\partial P_r}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial Q_r} = \lambda_i^{(r)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_\alpha} \quad \dots \quad (1a),$$

$$\frac{\partial P_r}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_r} = \lambda_i^{(r)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_\alpha} \quad \dots \quad (1b).$$

Dazu kommen entsprechende Gleichungen für $\frac{\partial Q_r}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial Q_r}{\partial p_\alpha}$ mit Multiplikatoren $\mu_i^{(r)}$, welche ebenso wie die $\lambda_i^{(r)}$ willkürlich sind. Die Gleichungen sind ungeschickt, da in dem ersten Glied links jeweils die alten, im zweiten Glied die neuen Größen als unabhängige Variable fungieren.

Man kann sie umformen ⁶⁾ in

$$[Q_r, Q_s]_L = [P_r, P_s]_L = 0, \quad [P_r, Q_s]_L = \delta_{rs} \quad \dots \quad (2),$$

wobei die „L a g r a n g e s c h e n Klammerausdrücke“ definiert sind als

$$[A, B]_L = \frac{\partial p_\alpha}{\partial A} \frac{\partial q_\alpha}{\partial B} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial A} \frac{\partial p_\alpha}{\partial B} \quad \dots \quad (3).$$

In diesen Gleichungen wird nur nach den neuen Koordinaten differenziert. Meist ist die Benutzung der alten Größen als unabhängige Variable bequemer. Hier ergibt sich das Gleichungssystem ^{7), 2)}

$$\left. \begin{aligned} \{P_r, Q_s\} &= \delta_{rs} + \lambda_i^{(r)} \mu_i^{(s)} C_{ij} \\ \{P_r, P_s\} &= \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} C_{ij} \\ \{Q_r, Q_s\} &= \mu_i^{(r)} \mu_j^{(s)} C_{ij} \\ \{P_r, \Phi_j\} &= \lambda_i^{(r)} C_{ij} \\ \{Q_r, \Phi_j\} &= \mu_i^{(r)} C_{ij} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

mit der Abkürzung

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = C_{ij} \quad \dots \quad (5).$$

Kombiniert man die Gl. (1) mit den entsprechenden Gln. für $\frac{\partial Q_r}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial Q_r}{\partial p_\alpha}$ so erhält man die Bedingungen ausgedrückt in den Poissonklammern hinsichtlich \bar{P}, \bar{Q} und in den Lagrange-Klammern hinsichtlich p, q . Sie sind jedoch weniger bequem, so daß wir sie hier nicht anschreiben wollen. Im Folgenden knüpfen wir an (4) an.

Wenn überhaupt eine Reduktion der Variablen möglich ist, also eine Lösung für P, Q, λ, μ in (4) existiert, so gibt es auch eine mit $\lambda, \mu = 0$. Wir brauchen dazu von der als gegeben angenommenen Lösung von (4) nur überzugehen zu

$$\bar{P}_r = P_r - \lambda_i^{(r)} \Phi_i; \quad \bar{Q}_r = Q_r - \mu_i^{(r)} \Phi_i.$$

Dies ist von Bedeutung für die Beurteilung von Poissonklammerrelationen im System der p_α, q_α . Bezeichnen wir mit $\{A, B\}_I$ die Poissonklammer der Größen A und B im System der p_α, q_α und mit $\{A, B\}_{II}$ die Klammer im System P_s, Q_s , so hat $\{A, B\}_{II}$ einen eindeutigen physikalischen Sinn, dagegen $\{AB\}_I$ nicht, denn dieselben physikalischen Größen A, B kann man zufolge der

⁵⁾ Ist die Anzahl der Φ_i ungerade, so kann dies natürlich nicht vollständig gelingen. Indessen gelten die folgenden Überlegungen auch bei einer teilweisen Elimination der Nebenbedingungen.

⁶⁾ Indem man (1a) mit $\frac{\partial q_\alpha}{\partial Q_s}$ (1b) mit $-\frac{\partial p_\alpha}{\partial Q_s}$ multipliziert und addiert ergibt sich z. B. die 1. Gl. (2).

⁷⁾ Z. B. Multiplikation von (1a) mit $-\frac{\partial Q_s}{\partial p_\alpha}$, von (1b) mit $\frac{\partial Q_s}{\partial q_\alpha}$ und Addition.

Nebenbedingungen $\Phi_i = 0$ in mannigfacher Weise als Funktion der p_α, q_α darstellen. Physikalisch sinnvoll ist eine Poissonklammer $\{AB\}_I$ offenbar dann, wenn A und B in solcher Weise als Funktionen der p_α, q_α dargestellt sind, daß

$$\{A, B\}_I = \{A, B\}_{II}.$$

Dies ist aber nach dem obigen gerade dann der Fall, wenn A und B als Funktionen der \bar{P}, \bar{Q} allein dargestellt sind. Diese sind jedoch dadurch ausgezeichnet, daß ihre Poissonklammern mit den Φ_i verschwinden. Dasselbe müssen wir daher für A und B fordern und wir haben den Satz:

Damit die Poissonklammerrelation $\{A, B\}_I = C$ physikalisch sinnvoll ist, müssen A und B in einer solchen Form angeschrieben werden, daß ihre Poissonklammern mit den Nebenbedingungen verschwinden:

$$\{A, \Phi_i\}_I = \{B, \Phi_i\}_I = 0.$$

Eingegangen am 8. Sept. 1951.

Fehlerabschätzung bei der ersten Randwertaufgabe bei elliptischen Differentialgleichungen

Von L. Collatz in Hannover

Der Satz vom Randmaximum für subharmonische Funktionen, der unter gewissen Voraussetzungen auch für allgemeinere lineare elliptische Differentialgleichungen gilt, dient bei der 1. Randwertaufgabe zur Fehlerabschätzung für eine Näherungsfunktion, sowohl wenn diese wie z.B. beim Trefftz'schen Verfahren nur die Differentialgleichung erfüllt, als auch, wenn sie wie z.B. beim Ritz'schen Verfahren nur der Randbedingung genügt. Die Abschätzungen werden angewendet auf ein Verfahren, das auf eine Idee von R. v. Mises zurückgeht, bei welchem man Differentialgleichung und Randbedingungen simultan annähert.

For the first boundary value problem, the boundary maximum theorem for subharmonic functions, that is, under certain conditions, valid also for more general linear differential equations of the elliptic type, is used for the estimation of the error of the approximate function. The approximation may only satisfy either the differential equation (Trefftz' method) or the boundary conditions (Ritz' method). The estimations are applied to a method that — following an idea of R. v. Mises — approximates the differential equation and the boundary conditions simultaneously.

Le théorème du maximum marginal pour des fonctions sous-harmoniques, lequel, à certaines suppositions, s'applique aussi à des équations différentielles linéaires, elliptiques plus générales, au premier problème de valeur marginale, sert à l'estimation des erreurs pour une fonction approximative, et au cas que celle-ci, comme p.e. à la méthode de Trefftz, ne correspond qu'à l'équation différentielle, et au cas que, comme p.e. à la méthode de Ritz, elle ne satisfait qu'à la condition marginale. Les estimations sont appliquées à une méthode, qui a son origine dans une idée de R. v. Mises, à laquelle on approche l'équation différentielle et les conditions marginales simultanément.

Теорема краевого максимума для субгармонических функций, действительная при известных предположениях также для более общих линейных эллиптических дифференциальных уравнений, служит в первой краевой задаче для оценки ошибок для приближенной функции; это имеет место как в том случае, когда последняя — как напр. при способе Треффтца — выполняет только дифференциальное уравнение, так и в том, когда она — как напр. при способе Ритца — удовлетворяет только краевому условию. Оценки применяются к способу, основывающемуся на идее Р. в. Мизеса при котором дифференциальное уравнение и краевые условия совместно приближаются.

In Nr. 1 bis Nr. 3 wird zunächst eine allgemeine Fehlerabschätzung für die 1. Randwertaufgabe bei elliptischen Differentialgleichungen auf Grund des Satzes vom Randmaximum aufgestellt, in Nr. 4 das Trefftz'sche Verfahren¹⁾ etwas ausführlicher behandelt; in Nr. 6 bis Nr. 9 wird eine auf R. v. Mises zurückgehende Methode der gleichzeitigen Annäherung von Differentialgleichung und Randbedingungen dargestellt und auf sie die Fehlerabschätzungen von Nr. 2 und Nr. 3 angewendet. Diese Methode ist auch bei allgemeineren Randwertaufgaben anwendbar, und daher sind Nr. 6 bis Nr. 9 so ausgeführt, daß sie (abgesehen natürlich von den Verweisen auf den ersten Teil) auch für sich ohne Lesen von Nr. 1 bis 5 verständlich sind. Deshalb ist auch in Nr. 6 bis Nr. 9. von der in Nr. 1 bis 5 verwendeten abgekürzten Schreibweise des Fortlassens der Summenzeichen (die sich bei Beweisen gut bewährt) kein Gebrauch gemacht.

1. Bezeichnungen

Vorgelegt sei die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L[u] = r \quad (1)$$

mit

$$L[u] = - \sum_{j,k=1}^n a_{jk} u_{jk} - \sum_{j=1}^n b_j u_j + c u$$

¹⁾ E. Trefftz, Ein Gegenstück zum Ritz'schen Verfahren, Verh. 2. internationaler Kongreß f. tech. Mechanik, Zürich 1926. S. 131.

E. Trefftz, Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritz'schen Verfahren, Math. Annalen 100 (1928), 503—521.

oder kürzer

$$L[u] = -a_{jk} u_{jk} - b_j u_j + c u \dots \dots \dots (2).$$

Dabei ist $u(x_1, \dots, x_n)$ eine gesuchte Funktion der unabhängigen reellen Variablen x_1, \dots, x_n in einem Gebiet $\mathfrak{B} + \Gamma$ des n -dimensionalen Raumes, die a_{jk}, b_j, c, r sind in $\mathfrak{B} + \Gamma$ gegebene, etwa stetige Funktionen derselben Argumente, und in Gl. (2) wie auch im folgenden sind (wie in der Tensorrechnung üblich) die Summenzeichen fortgelassen, indem in einem Produkt über einen zweimal auftretenden lateinischen Index von 1 bis n zu summieren ist. Bei a und b dienen angehängte Indizes j, k nur zur Unterscheidung von Funktionen, bei u, v, w, z bedeuten sie partielle Ableitungen:

$$u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u_{jk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Die Differentialgleichung sei elliptisch, d. h. die Matrix der a_{jk} (die als symmetrisch vorausgesetzt werden kann: $a_{jk} = a_{kj}$) sei positiv definit in $\mathfrak{B} + \Gamma$. Ferner sei $c \geq 0$. \mathfrak{B} sei ein offenes beschränktes Gebiet und $\mathfrak{B} + \Gamma$ das durch Hinzunahme der Randpunkte aus \mathfrak{B} hervorgehende abgeschlossene Gebiet. Γ sei dabei eine abgeschlossene zusammenhängende $(n-1)$ -dimensionale stückweise glatte²⁾ Hyperfläche.

Es gilt der Gaußsche Integralsatz für eine in $\mathfrak{B} + \Gamma$ stetige, mit stetiger Ableitung nach einer Variablen x_j versehene Funktion $a(x_1, \dots, x_n)$:

$$\int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial a}{\partial x_j} d\tau = - \int_{\Gamma} a \cos(v, x_j) df \dots \dots \dots (3).$$

Dabei bedeuten $d\tau = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ das Volumenelement, df das Oberflächenelement auf Γ und v die innere Normale. Die Normale darf dabei auf gewissen $(n-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten nicht definiert sein.

Nun seien auf Γ die Randwerte \bar{u} von u vorgeschrieben, wir nehmen der Einfachheit halber \bar{u} auf Γ als stetig an (auch bei anderen Funktionen v, \dots soll \bar{v}, \dots jeweils die Randwerte auf Γ bezeichnen). Die 1. Randwertaufgabe verlangt dann die Bestimmung von u aus (1) und

$$u = \bar{u} \quad \text{auf} \quad \Gamma \dots \dots \dots (4).$$

2. Ein Hilfssatz

In Nr. 3 wird ein Hilfssatz benötigt, der in ähnlicher Form bei Courant-Hilbert, a. a. O., S. 275 und bei Bateman³⁾ steht; da er aber hier etwas allgemeiner gebraucht wird, sei sein Beweis kurz angegeben.

Hilfssatz: Für eine nichtkonstante, mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich versehene Funktion $w(x_1, \dots, x_n)$ sei $L[w] \leq 0$ in \mathfrak{B} sowie in (2) a_{jk} positiv definit und $c \geq 0$; der Größtwert von w in $\mathfrak{B} + \Gamma$ sei M ; dieses Maximum M wird im Fall $c=0$ stets und im Fall $c \geq 0$, wenn überdies $M \geq 0$ ist, nur auf dem Rande Γ angenommen.

Beweis (indirekt, nach Bateman): Wir nehmen an, es sei in einem inneren Punkt P_1 von \mathfrak{B} $w(P_1) = M$. Da w nichtkonstant ist, gibt es einen Punkt P_2 von \mathfrak{B} mit $w(P_2) < M$. Zu diesen beiden inneren Punkten gibt es einen Verbindungsweg C und eine positive Zahl $\rho > 0$ derart, daß um jeden Punkt P von C eine ganz zu \mathfrak{B} gehörende Hyperkugel vom Radius ρ gelegt werden kann. Wegen der Stetigkeit von w gibt es auf C einen Punkt P_3 mit $w(P_3) = M$ und $w(P) < M$, falls P auf C zwischen P_2 und P_3 liegt. Jetzt wählt man auf C einen Punkt P_4 hinreichend nahe an P_3 derart, daß man um P_4 eine Hyperkugel K_1 legen kann, die P_3 auf ihrer Oberfläche enthält, wobei K_1 ganz zu \mathfrak{B} gehört. Im Mittelpunkt P_4 ist $w(P_4) < M$, in einem Oberflächenpunkt P_5 ist $w(P_5) = M$. Jetzt läßt man den Radius der Hyperkugel so lange abnehmen, bis man zu einer Hyperkugel K_2 um P_4 gelangt mit der Eigenschaft: Im Innern von K_2 ist überall $w < M$, in mindestens einem Randpunkt P_5 von K_2 ist $w(P_5) = M$. Es sei P_6 der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_4 P_5}$. Für die Hyperkugel K_3 mit P_6 als Mittelpunkt und $R = \overline{P_5 P_6}$ als Radius gilt dann: In dem Oberflächenpunkt P_5 ist $w(P_5) = M$, sonst ist im Innern und auf der Oberfläche der Hyperkugel $w < M$. Um den Punkt P_5 wird eine Hyperkugel K_4 von einem Radius $k < R$ gelegt. Nun werde vorübergehend der Punkt P_6 als Anfangspunkt des x_1, \dots, x_n -Koordinatensystems gewählt und die Entfernung von ihm mit r bezeichnet, $r^2 = x_j x_j$. Die Hilfsfunktion $z = w + \delta [e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}]$, wo α und δ positive Konstanten seien, ist nun $= M$ im Mittelpunkt P_5 von K_4 und $< M$ auf der ganzen Oberfläche Φ von K_4 bei passend gewähltem α, δ ; denn auf dem Teil von Φ , der außerhalb K_3 liegt, ist die eckige Klammer negativ und auf dem mit K_3 gemeinsamen Teil von Φ ist $w < M$, und bei gegebenem α kann man δ so klein wählen, daß dann dort auch $z < M$ bleibt. Also: z nimmt im Mittelpunkt von K_4 den Wert M an und hat auf der ganzen Oberfläche

²⁾ R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2, Bln. 1937, S. 228.

³⁾ H. Bateman, Partial differential equations of mathematical physics, New York 1944, S. 135.

von K_4 Werte $z < M$, es muß also z mindestens in einem Punkt P_7 innerhalb von K_4 ein differenzierbares Maximum annehmen.

Nun rechnet man leicht aus:

$$L[z] = L[w] + \delta L[e^{-\alpha r^2}] - c \delta e^{-\alpha R^2}$$

$$\text{mit } e^{\alpha r^2} \{L[e^{-\alpha r^2}] - c e^{-\alpha R^2}\} = -4\alpha^2 a_{jk} x_j x_k + 2\alpha(a_{jj} + b_j x_j) + c - c e^{\alpha(r^2 - R^2)}.$$

Hier hat α^2 einen negativen Faktor, und das letzte Glied ist wegen $c \geq 0$ nichtpositiv; durch passende Wahl eines genügend großen α kann daher erreicht werden, daß die geschweifte Klammer an der Stelle P_7 negativ (Null ausgeschlossen) wird. Wegen $L[w] \leq 0$ muß also $L[z] < 0$ sein an der Stelle P_7 . Nun kann aber $L[z]$ an der Stelle P_7 unmittelbar angegeben werden. Dort hat z ein differenzierbares Maximum, es ist $z_j = 0$ (für $j=1, 2, \dots, n$), und die negativ genommenen zweiten Ableitungen bilden eine positiv definite oder semidefinite Matrix

$$-z_{jk} \xi_j \xi_k \geq 0$$

für beliebige reelle ξ_j . Es wird also

$$L[z]_{P_7} = -a_{jk} z_{jk} + c z.$$

Da sowohl die a_{jk} als auch die $-z_{jk}$ die Koeffizienten positiv (semi-)definiter quadratischer Formen sind, ist nach einer Formel von Fejér⁴⁾

$$-a_{jk} z_{jk} \geq 0.$$

Da $z(P_5) = M$ ist, muß das Maximum von z , also $z(P_7) \geq M$ sein; nach den Voraussetzungen ist $cz = 0$ im Falle $c = 0$ und $cz(P_7) \geq 0$ im Falle $c \geq 0$, da dann $M \geq 0$ vorausgesetzt war; mithin ist $L[z]_{P_7} \geq 0$, während die vorangehende Betrachtung $L[z]_{P_7} < 0$ ergab, womit ein Widerspruch vorliegt.

Corollar: Durch Übergang von w zu $-w$ sieht man, daß der Hilfssatz bestehen bleibt, wenn man bei $L[w]$ und M die Ungleichheitszeichen \geq, \leq vertauscht und als M das Minimum von w nimmt.

3. Allgemeine Fehlerabschätzung

Aus dem Hilfssatz ergibt sich sofort eine Fehlerabschätzung für Näherungslösungen v der ersten Randwertaufgabe (1), (4). Dabei setzen wir voraus, daß v von der Randwertaufgabe (1), (4) wenigstens eine der beiden Gleichungen (1), (4) erfüllt und unterscheiden somit zwei Fälle.

1. Fall: v erfüllt die Differentialgleichung $L[u] = r$ exakt, braucht aber nicht die vorgegebenen Randwerte \tilde{u} anzunehmen. Die Fehlerfunktion $w = v - u$ genügt dann der Randwertaufgabe $L[w] = 0$, $\tilde{w} = \tilde{v} - \tilde{u}$, wobei die Randwerte \tilde{w} mit gegebener Näherungslösung ebenfalls bekannt sind. Mit $L[w] = 0$ sind beide im Hilfssatz und im Corollar auftretenden Voraussetzungen $L[w] \leq 0$ und $L[w] \geq 0$ erfüllt. Wenn w überhaupt nichtnegative Werte annimmt, ist das Maximum M von w also $M \geq 0$, und nach dem Hilfssatz nimmt w den Wert M nur auf dem Rande Γ an; es ist also dann $w_{\max} = \tilde{w}_{\max} \geq 0$. Nimmt w überhaupt nichtpositive Werte an, so ist entsprechend nach dem Corollar $w_{\min} = \tilde{w}_{\min} \leq 0$. Nimmt also w den Wert 0 an, so ist $\tilde{w}_{\min} \leq w \leq \tilde{w}_{\max}$, und es ist $\tilde{w}_{\min} \leq 0, \tilde{w}_{\max} \geq 0$; nimmt w nicht den Wert 0 an, hat also w als stetige Funktion ein festes Vorzeichen, z.B. $w > 0$, so ist $0 < w \leq \tilde{w}_{\max}$.

Wir können die verschiedenen Fälle auch nach dem Verhalten von \tilde{w} an Stelle von w ordnen, was für die Anwendungen bequemer ist, und dann ergibt sich die

Fehlerabschätzung: Bei der Randwertaufgabe (1), (2), (4) mit $c \geq 0$, a_{jk} positiv definit sei v eine die Differentialgleichung $L[v] = r$ erfüllende Näherungslösung. Von der Fehlerfunktion $w = v - u$ sind die Randwerte $\tilde{w} = \tilde{v} - \tilde{u}$ bestimmbar. Nimmt \tilde{w} den Wert Null an, so gilt in \mathfrak{B} die Fehlerabschätzung

$$\tilde{w}_{\min} \leq w \leq \tilde{w}_{\max} \quad (5).$$

Nimmt w nicht den Wert Null an, und hat also w ein festes Vorzeichen, so hat auch die Fehlerfunktion w in $\mathfrak{B} + \Gamma$ überall dasselbe Vorzeichen, und für den Betrag von w gilt

$$|w| \leq |\tilde{w}|_{\max} \quad (6).$$

Im Falle $c = 0$ gilt (5) unabhängig davon, ob w den Wert Null annimmt oder nicht.

Vom Standpunkt der praktischen Analysis aus liegt hier ein günstiger Fall für eine Fehlerabschätzung vor. Solche Abschätzungen fallen bei anderen Differentialgleichungsaufgaben oft umständlicher und ungenauer aus, während die Abschätzungen (5) und (6), sofern man sie als für den ganzen Bereich \mathfrak{B} gültig auffaßt, die bestmöglichen sind; der Fehler erreicht ja tatsächlich die angegebenen Schranken auf dem Rande Γ .

2. Fall: Die Näherungslösung v erfüllt die Randbedingungen (4) exakt, braucht aber nicht der Differentialgleichung (1) zu genügen. Dieser Fall tritt z.B. auf, wenn man das Ritzsche Ver-

⁴⁾ L. Fejér, Über die Eindeutigkeit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z. 1 (1918) S. 70—79.

fahren durchgeführt hat; er besitzt daher besonderes Interesse. Es wird jetzt eine Fehlerfunktion $L[v] - L[u] = L[v] - r$ auftreten; nun verwende man zwei Hilfsfunktionen q_1, q_2 derart, daß

$$L[v] + L[q_1] \leq r \quad \text{bzw.} \quad L[v] + L[q_2] \geq r \quad \dots \quad (7)$$

in ganz $\mathfrak{B} + \Gamma$ gilt. Man stelle etwa $L[v]$ auf, bilde mit beliebigen Funktionen q_1^* und q_2^* die Ausdrücke $L[q_1^*]$ und $L[q_2^*]$ und suche durch Kombination von v mit $q_1 = c_1 q_1^*$ bzw. $q_2 = c_2 q_2^*$ die Ungleichungen in $\mathfrak{B} + \Gamma$ zu erfüllen. Stets lassen sich derartige Funktionen q_1, q_2 angeben, wenn man eine Funktion z mit $L[z] \leq -A < 0$ in \mathfrak{B} kennt; z.B. für den Potentialausdruck

$$L[u] = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \quad \text{kann man } z = \frac{A}{2n} \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad \text{verwenden; man braucht dann nur in } q_j = v + \gamma_j z$$

die Konstanten γ_1 und γ_2 passend zu bestimmen. Dann ist der Hilfssatz auf die Funktionen $w = v + q_1 - u$, bzw. $v + q_2 - u$ anwendbar. Die Werte der Funktion $v + q_1 - u$ sind am Rande bekannt, der Maximalwert am Rande sei M_1 , entsprechend sei M_2 der Minimalwert von $v + q_2 - u$ am Rande. Ferner setzen wir

$$\mu_1 = \begin{cases} M_1 & \text{im Falle } c=0 \\ \text{Max}(M_1, 0) & \text{im Falle } c \geq 0 \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} M_2 & \text{im Falle } c=0 \\ \text{Min}(M_2, 0) & \text{im Falle } c \geq 0. \end{cases}$$

Dann besagt der Hilfssatz, bzw. das Corollar

$$v + q_1 - u \leq \mu_1, \quad v + q_2 - u \geq \mu_2$$

und damit erhalten wir die Schranken für u :

$$v + q_1 - \mu_1 \leq u \leq v + q_2 - \mu_2 \quad \dots \quad (8).$$

4. Aufstellung einer Näherungslösung v und Trefftz'sches Verfahren

Von den zahlreichen Möglichkeiten, eine Näherungslösung v aufzustellen, seien hier nur die folgenden genannt⁵⁾.

Für v wird der Ansatz gemacht

$$v = v_0 + a_\varrho v_\varrho \quad \dots \quad (9).$$

Dabei möge über einen in einem Produkt zweimal auftretenden griechischen Index ϱ, σ, \dots von 1 bis p summiert werden. Es sind v_0, v_1, \dots, v_p fest gewählte Ansatzfunktionen, welche die inhomogene, bzw. die homogene Differentialgleichung (1) erfüllen:

$$L[v_0] = r, \quad L[v_\varrho] = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, p) \quad \dots \quad (10).$$

Dann erfüllt in (9) v für beliebige Werte der Parameter a_ϱ die Differentialgleichung (1).

Ein naheliegender Weg zur Bestimmung der a_ϱ ist die Fehlerquadratmethode; dabei soll v am Rande möglichst gut die gegebenen Randwerte u annähern, d.h. es soll

$$J = \int_{\Gamma} (\tilde{v} - \tilde{u})^2 df = \text{Min} \quad \dots \quad (11)$$

einen Kleinstwert annehmen. Dann sind

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial a_\varrho} = \int_{\Gamma} (\tilde{v}_0 + a_\sigma \tilde{v}_\sigma - \tilde{u}) \tilde{v}_\varrho df = 0 \quad (\varrho = 1, \dots, p) \quad \dots \quad (12)$$

p lineare Gleichungen für die Unbekannten a_ϱ . Für die zugehörige Funktion v nach (9) kann man dann nach Nr. 3 eine Fehlerabschätzung durchführen.

Trefftz beschränkt für die Potentialgleichung einen anderen Weg, bei welchem man zugleich für ein bei den Anwendungen öfter gebrauchtes Integral Schranken erhält.

Die Differentialgleichung wird jetzt als selbstadjungiert vorausgesetzt, d. h. es sei

$$b_j = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} \quad (\text{Summation über } k).$$

Wie beim Ritzschen Verfahren spielt auch beim Trefftz'schen Verfahren ein Integral J (eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Integrals) eine wichtige Rolle:

$$J[v, w] = \int_{\mathfrak{B}} (a_{jk} v_j w_k + c v w) d\tau = J[w, v] \quad \dots \quad (13).$$

Es wird $J[v, v] = J[v]$ gesetzt. Wendet man den Gaußschen Integralsatz (3) auf die Funktion $a = v a_{jk} w_k$ an, so erhält man eine der Greenschen Formeln, wobei man in der entstehenden

⁵⁾ Eine Aufzählung verschiedener Arten findet sich z.B. Z. angew. Math. Mech., Bd. 31 (1951), S. 230—236.

Formel die rechte Seite bekanntlich durch Einführung der Konormalen⁶⁾ σ , die mit einer Größe A zusammen durch

$$a_{jk} \cos(v, x_j) = A \cos(\sigma, x_k) \quad (k=1, \dots, n; A \geq 0)$$

bestimmt wird, umformen kann:

$$\int_{\mathfrak{B}} v L[w] d\tau = J[v, w] + \int_{\Gamma} v A \frac{\partial w}{\partial \sigma} df \quad (14).$$

Zur Bestimmung der Parameter a_e im Ansatz (9) wird jetzt die Forderung aufgestellt, daß der Fehler $w = v - u$ in der durch das Integral J vermittelten Metrik gemessen zum Minimum gemacht werden soll, also

$$J[w] = J[v - u] = \text{Min} \quad (15).$$

Die Forderung (15) ergibt bei dem Ansatz (9)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J[v_0 + a_e v_e - u]}{\partial a_\mu} = J[v_0 + a_e v_e - u, v_\mu] = J[w, v_\mu] = 0 \quad (\mu = 1, \dots, p) \quad (16).$$

Nach (14) folgen

$$a_e \int_{\Gamma} A v_e \frac{\partial v_\mu}{\partial \sigma} df = \int_{\Gamma} A (u - v_0) \frac{\partial v_\mu}{\partial \sigma} df \quad (\mu = 1, \dots, p) \quad (17)$$

(über ϱ summieren)

als p lineare Bestimmungsgleichungen für die a_e (die Größen v_0, v_e, u sind auf Γ bekannt). Hat man aus diesem Gleichungssystem die a_e berechnet, so kann man für die mit diesen a_e nach (9) gebildete Funktion v wieder nach Nr. 3 eine Fehlerabschätzung durchführen.

5. Beispiele

Die beiden folgenden Beispiele dienen lediglich zur Erläuterung der Methoden, es ist dabei nicht auf große Genauigkeit Wert gelegt.

I. Als einfaches Beispiel werde die stationäre Temperaturverteilung $u(x, y, z)$ im Innern eines Würfels $|x| < 1, |y| < 1, |z| < 1$ betrachtet, der zur Hälfte in Wasser von der Temperatur 0 taucht und zur Hälfte an ein Medium mit linear ansteigender Temperatur grenzt. Es sei also

$$\left. \begin{aligned} Au &= 0 \text{ für } |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1 \\ u &= 0 \text{ für } z \leq 0 \text{ und } |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1 \\ u &= z \text{ für } z \geq 0 \text{ und } |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1 \\ u &= 0 \text{ für } z = -1 \\ u &= 1 \text{ für } z = 1 \end{aligned} \right\} \quad (18).$$

Um nur einen ganz einfachen und dann allerdings auch noch recht ungenauen Ansatz zu beschreiben, werde $v_0 = 0, v_1 = 1, v_2 = z, v_3 = x^2 + y^2 - 2z^2$ gesetzt, wobei die Symmetrien der Aufgabe benutzt sind. Die ganz kurze Rechnung liefert beim ersten Weg nach (12) die Gleichungen

$$24a_1 = 8, \quad \frac{40}{3} a_2 = \frac{20}{3}, \quad \frac{8 \cdot 56}{15} a_3 = -4$$

und als Näherung

$$v_F = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} z - \frac{15}{112} (x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Am Rande schwankt v_F zwischen $-\frac{1}{6}$ und $\frac{67}{336}$, und hier gilt im ganzen Bereich

$$-0,167 \approx -\frac{1}{6} \leq v_F - u \leq \frac{67}{336} \approx 0,200.$$

Beim zweiten Weg nach (17) hat man die Gleichungen (jetzt ist die Konstante zunächst fortzulassen)

$$-8a_2 = -4, \quad -64a_3 = 8$$

und somit

$$v_T = c + \frac{1}{2} z - \frac{1}{8} (x^2 + y^2 - 2z^2).$$

⁶⁾ A. G. Webster-G. Szegő, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Lpz. und Bln. 1930, S. 311.

Die Konstante c kann man etwa so bestimmen: $v_T - c - u$ schwankt zwischen den Werten $-\frac{4}{8}$ und $-\frac{1}{8}$; setzen wir $c = \frac{5}{16}$, so schwankt $v_T - u$ zwischen $-\frac{3}{16}$ und $\frac{3}{16}$, es gilt dann im ganzen Bereich

$$|v_T - u| \leq \frac{3}{16} = 0,1875 \dots \dots \dots (19).$$

Die Fehlerschranken sind hier noch so groß wegen der Knickstellen in den Randwerten von u . Durch Hinzunahme weiterer Glieder im Ansatz lassen sich natürlich die Schranken leicht herunterdrücken.

II. An dem folgenden Beispiel sei gezeigt, daß man oft mit Hilfe einer Einpassungsmethode sehr rasch zur Aufstellung einer groben Näherungslösung gelangen kann. Es sei

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(1+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + (1+x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad |y| \leq \frac{1}{2} \dots \dots (20)$$

$$\text{und } u = x \text{ am Rande (für } x=0, x=1 \text{ und } |y|=\frac{1}{2})$$

vorgelegt; u läßt sich deuten als Temperaturverteilung in einem Körper oder prismatischen Raumteil von quadratischem Querschnitt in einem linearen Temperaturfeld $u=x$, während die innere Wärmeleitfähigkeit linear mit x veränderlich ist. Durch spezielle Ansätze (u als Summe oder Produkt einer Funktion von x und einer Funktion von y allein) stellt man leicht spezielle Lösungen v_0 von (20) auf:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \ln(1+x), \quad v_3 = (1+x)^2 - 2y^2, \quad v_4 = N_0(\beta(1+x)) \operatorname{Co} \beta y,$$

wobei N_0 die Neumannsche Zylinderfunktion nullter Ordnung ist. Die noch freie Konstante β wählen wir so, daß eine in $0 \leq x \leq 1$ zu $x = \frac{1}{2}$ ungefähr symmetrische Funktion entsteht: $\beta = 3,72$.

Zweckmäßig zeichnet man sich die Verläufe dieser Funktionen längs des Randes auf; dann sieht man leicht, wie man durch Linearkombination die gegebene Randverteilung annähern kann (bequem ist es, von den Randwerten $-x$ auszugehen und Linearkombinationen der v_0 hinzuzufügen, so daß das Ergebnis sich einer konstanten Verteilung annähert; man hat jeweils die Abweichung von der Konstanten und sieht nach, durch Hinzufügung welcher Funktionen man gerade diese Abweichung kompensieren kann). Dieses Probieren kann man natürlich vermeiden, wenn man die Gleichungen (17) verwendet, die dort auftretenden Integrale auswertet und die a_0 durch Auflösen eines linearen Gleichungssystems berechnet; aber bei etwas Erfahrung kommt man mit der Probiermethode ungleich schneller ans Ziel. Hier wurde zunächst als Näherung

$$v^* = 1,4v_2 + 0,01v_3 + 0,2 \frac{v_4}{\operatorname{Co} \beta \frac{\beta}{2}}$$

aufgestellt, für welche in Bild 1 die Fehlerfunktion am Rande $\tilde{v}^* - \tilde{u}$ wiedergegeben ist. Eine etwas bessere Anpassung wurde unter Hinzunahme der zu $x=1/2$ ungefähr symmetrischen Funktion

$$v_5 = 3v_2 - 13v_3$$

erzielt:

$$v = v^* + 0,005v_5 - \frac{1}{30} \frac{v_4}{\operatorname{Co} \beta \frac{\beta}{2}}.$$

In Bild 1 ist ebenfalls der Randverlauf der Fehlerfunktion $\tilde{v} - \tilde{u}$ dargestellt; man stellt fest

$$0,0284 \leq \tilde{v} - \tilde{u} \leq 0,0369;$$

es gilt nach Nr. 3 also im ganzen Quadratbereich

$$0,0284 \leq v - u \leq 0,0369.$$

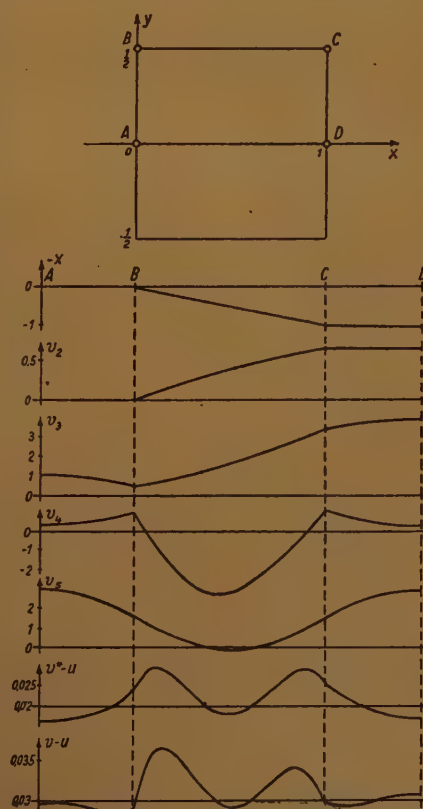


Bild 1.

Für den Quadratmittelpunkt $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ z.B. erhält man so

$$0,5436 \leq u\left(\frac{1}{2}, 0\right) \leq 0,5521 \quad \text{oder} \quad u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0,5479 \pm 0,0043.$$

6. Verfahren gleichzeitiger Annäherung von Differentialgleichung und Randbedingungen

Es liege eine Randwertaufgabe für eine Funktion u von n unabhängigen Veränderlichen x_1, \dots, x_n vor. Die Differentialgleichung sei nichtlinear

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0 \quad \text{in } \mathfrak{B} \quad (21)$$

oder linear

$$L[u] = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m} A_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = r(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{in } \mathfrak{B} \quad (22),$$

wo $L[u]$ ein linearer homogener Differentialausdruck in u mit gegebenen, von den x_j abhängigen Koeffizienten $A_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ist. Es kommen nichtlineare Randbedingungen

$$V_\mu\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad (23)$$

$(\mu = 1, \dots, k)$

oder lineare Randbedingungen

$$U_\mu\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = \gamma_\mu \quad \text{auf } \Gamma_\mu \quad (24)$$

$(\mu = 1, \dots, k)$

hinzu, wobei U_μ gegebene lineare homogene Differentialausdrücke in u sind. Dabei ist \mathfrak{B} ein gegebener Bereich im x_1 - x_2 -...- x_n -Raum und Γ_μ sind $(n-1)$ -dimensionale Hyperflächen; gewöhnlich werden es Randflächen von \mathfrak{B} sein. Bisher wurden gewöhnlich zwei Arten von Näherungsverfahren untersucht, bei denen u durch einen Näherungsausdruck w mit p Parametern a_1, \dots, a_p

$$u \approx w(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_p) \quad (25)$$

angenähert wird:

1. Fall (Randmethode): w erfüllt für beliebige Werte a_p exakt die Differentialgleichung (21); die a_p sind so zu bestimmen, daß die Randbedingungen (23) möglichst gut befriedigt werden.
2. Fall (Gebietsmethode): w genügt für beliebige Werte der a_p den Randbedingungen (23); die a_p sind so zu wählen, daß die Differentialgleichung (21) möglichst gut erfüllt wird.

In beiden Fällen pflegte man die Güte der Näherungen nach der Größe des Fehlers ε , d.h. der Abweichung $w - u$ der Näherung w von der exakten Lösung u zu beurteilen und fragte nach Abschätzungen für den Betrag $|\varepsilon|$ des Fehlers. Nun betont R. v. Mises⁷⁾, daß es vom physikalischen Standpunkt aus vernünftiger ist, Toleranzen δ, δ_μ vorzuschreiben und nach einer Näherung w zu fragen, die diese Toleranzen bei der Differentialgleichung und den Randbedingungen einhält (in wohl leicht verständlicher Schreibweise):

$$|F[w]| \leq \delta, \quad |V_\mu[w]| \leq \delta_\mu \quad (26).$$

Bei physikalischen und technischen Aufgaben werden gewöhnlich weder die Differentialgleichung noch die Randbedingungen exakt gelten, sondern es sind in der mathematischen Formulierung vereinfachende Annahmen, Linearisierungen und andere Idealisierungen enthalten, so daß (21) und (23) nicht streng gelten werden.

Einen naheliegenden Ansatz für w erhält man aus der Forderung, den Integralausdruck

$$J = \int_{\mathfrak{B}} F^2[w] d\tau + \sum_{\mu=1}^k k_\mu \int_{\Gamma_\mu} V_\mu^2[w] df \quad (27)$$

zum Minimum zu machen. Dabei ist $d\tau$ das Volumenelement in \mathfrak{B} und df das Oberflächenelement auf Γ_μ , die Zahlen k_μ sind gewisse positive Konstanten, über deren geeignete Wahl in Nr. 9 gesprochen wird. Etwas allgemeiner könnte man

$$J^* = \int_{\mathfrak{B}} p(x_j) F^2[w] d\tau + \sum_{\mu=1}^k k_\mu \int_{\Gamma_\mu} p_\mu(x_j) V_\mu^2[w] df = \text{Minimum} \quad (28)$$

ansetzen, wobei p und p_μ als Gewichtsfunktionen positive Ortsfunktionen sind.

⁷⁾ R. v. Mises, On Network Methods in Conformal Mapping and in Related Problems (erscheint demnächst).

Wir setzen hier $p=p_\mu=1$. Die Forderungen für ein Minimum von J

$$\frac{\partial J}{\partial a_q} = 0, \quad (q=1, \dots, p) \dots (29)$$

dienen dann zur Bestimmung der Konstanten a_1, \dots, a_p .

Setzt man die so ermittelten a_q in die Näherung w und diese in (21), (23) ein, so sieht man, welchen Fehler man noch bei F und V_μ hat und kann notfalls einen Ansatz mit weiteren Konstanten a_q durchführen oder die Gewichte k_μ bei den Randbedingungen ändern.

Hat man eine Näherung w gefunden, welche die Toleranzforderungen (26) erfüllt, so tritt die Frage nach der Fehlerabschätzung jetzt in der folgenden Form auf: Wie groß ist bei gegebenen δ, δ_μ der Spielraum für u ? D.h. man hat also eine Näherungslösung w und die gesuchte Funktion u , welche beide den Ungleichungen (26) genügen

$$|F[w]| \leq \delta, \quad |F[u]| \leq \delta, \quad |V_\mu[w]| \leq \delta_\mu, \quad |V_\mu[u]| \leq \delta_\mu \dots (30)$$

und man fragt nach einer Schranke S für den Betrag des möglichen Unterschiedes

$$|\varepsilon| = |w - u| \leq S \dots (31),$$

wobei S von den δ, δ_μ abhängt.

Bei linearen Randwertaufgaben (22), (24) folgen aus

$$|L[w] - r| \leq \delta, \quad |L[u] - r| \leq \delta, \quad |U_\mu[w] - \gamma_\mu| \leq \delta_\mu, \quad |U_\mu[u] - \gamma_\mu| \leq \delta_\mu \dots (32)$$

für die mögliche Abweichung ε die Ungleichungen

$$|L[\varepsilon]| \leq 2\delta, \quad |U_\mu[\varepsilon]| \leq 2\delta_\mu \dots (33).$$

Hieraus ist die Schranke S für $|\varepsilon|$ in (31) festzulegen.

7. Gleichungen des Näherungsverfahrens bei linearen Randwertaufgaben

Der hier gegebene Ansatz ist auch für die Auffassung verwendbar, daß man etwa die Differentialgleichung (22) und die Randbedingungen (24) als streng und (27) und (29) als Vorschrift für ein Näherungsverfahren ansieht, welches sich von den sonst üblichen darin unterscheidet, daß man sich beim Ansatz für w noch nicht um die Differentialgleichung oder die Randbedingungen zu kümmern braucht. Das kann rechnerisch ein Vorteil sein, weil die strenge Erfüllung der Differentialgleichung oder der Randbedingungen mitunter zu schwerfälligeren Ansätzen und damit zu mühsameren Rechnungen führt. In (33) fällt dann der Faktor 2 fort:

$$|L[\varepsilon]| \leq \delta, \quad |U_\mu[\varepsilon]| \leq \delta_\mu \dots (34).$$

Macht man für w einen linearen Ansatz

$$w = \sum_{q=1}^p a_q w_q \dots (35),$$

so folgen aus

$$\frac{\partial J}{\partial a_q} = \frac{\partial}{\partial a_q} \left\{ \int_{\mathfrak{B}} \left(L \left[\sum_{\sigma=1}^p a_\sigma w_\sigma \right] - r \right)^2 d\tau + \sum_{\mu=1}^k k_\mu \int_{\Gamma_\mu} \left(U_\mu \left[\sum_{\sigma=1}^p a_\sigma w_\sigma \right] - \gamma_\mu \right)^2 df \right\} = 0 \dots (36)$$

für die a_q die linearen Bestimmungsgleichungen mit symmetrischer Koeffizientenmatrix:

$$\int_{\mathfrak{B}} (L[w] - r) L[w_q] d\tau + \sum_{\mu=1}^k k_\mu \int_{\Gamma_\mu} (U_\mu[w] - \gamma_\mu) U_\mu[w_q] df = 0 \dots (37)$$

oder

$$\sum_{\sigma=1}^p a_\sigma \left\{ \int_{\mathfrak{B}} L[w_\sigma] L[w_q] d\tau + \sum_{\mu=1}^k k_\mu \int_{\Gamma_\mu} U_\mu[w_\sigma] U_\mu[w_q] df \right\} = \int_{\mathfrak{B}} r L[w_q] d\tau + \sum_{\mu=1}^k k_\mu \int_{\Gamma_\mu} \gamma_\mu U_\mu[w_q] df \quad (38). \\ (q=1, \dots, p)$$

8. Fehlerabschätzung

Zur Durchführung einer Abschätzung des Fehlerbetrages $|\varepsilon|$ aus (33) oder (34) — wir können uns etwa auf (34) beschränken — legen wir eine speziellere Aufgabenklasse zugrunde, und zwar die erste Randwertaufgabe bei der elliptischen Differentialgleichung (1) (2)

$$L[u] = - \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = r \dots (39).$$

Dabei sind a_{jk}, b_j, c, r im Bereich \mathfrak{B} gegebene Funktionen von x_1, \dots, x_n . Die als symmetrisch angenommene Matrix der a_{jk} sei in $\mathfrak{B} + \Gamma$ positiv definit, und es sei $c \geq 0$. Auf dem Rande Γ von \mathfrak{B} seien für u Randwerte vorgeschrieben. Es ist also der Fehler ε abzuschätzen aus

$$|L[\varepsilon]| \leq \delta \text{ in } \mathfrak{B}, \quad |\varepsilon| \leq \delta_1 \text{ auf } \Gamma \dots (40).$$

Dann ist der Satz vom Randmaximum aus Nr. 2 anwendbar.

Nun sei z eine Funktion mit

$$L[z] \leq -A < 0 \text{ in } \mathfrak{B} \quad (41).$$

Oft wird man eine Funktion z mit $L[z] = -A < 0$ sehr leicht angeben können, vgl. Nr. 3, z.B.

$$z = \frac{A}{2n} \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad \text{für} \quad L[z] = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0;$$

durch geschickte Wahl von z läßt sich die Fehlerabschätzung verbessern. Auf dem Rande Γ sei $z_u \leq z \leq z_0$. Die Zahlen z_u und z_0 sind als bekannt anzusehen. Zunächst sei $c=0$.

Dann erfüllt nach (34) die Funktion

$$\varphi = \varepsilon + \frac{z\delta}{A} \quad \text{mit} \quad L[\varphi] \leq 0 \text{ in } \mathfrak{B} \quad (42)$$

die Voraussetzungen des Satzes vom Randmaximum.

Auf dem Rande ist $\varphi \leq \delta_1 + \frac{z_0\delta}{A}$, also gilt diese Abschätzung auch in ganz \mathfrak{B} und damit

$$\varepsilon \leq \delta_1 + \frac{\delta}{A} (z_0 - z) \quad (43).$$

Entsprechend ist $L[\bar{\varphi}] \geq 0$ für die Funktion $\bar{\varphi} = \varepsilon - \frac{z}{A} \delta$; das Minimum von $\bar{\varphi}$ wird auf Γ angenommen, also ist

$$\bar{\varphi} \geq -\delta_1 - z_0 \frac{\delta}{A}.$$

Somit gilt in \mathfrak{B} $\varepsilon \geq -\delta_1 - \frac{\delta}{A} (z_0 - z)$ und mit (43) insgesamt

$$|\varepsilon| \leq \delta_1 + \frac{\delta}{A} (z_0 - z) \quad (44).$$

Im Falle $c \geq 0$ wird das Maximum von $|\varphi|$ am Rande angenommen, also nach (42), wenn auf Γ gilt $\left| \frac{z}{A} \right| \leq B$,

$$\left| \varepsilon + \frac{z\delta}{A} \right| \leq \delta_1 + \delta B.$$

und damit

$$|\varepsilon| \leq \delta_1 + \delta \left(B + \left| \frac{z}{A} \right| \right) \leq \delta_1 + 2\delta B \quad (45).$$

9. Beispiel

Es sei

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \mathfrak{B}, \quad u(x, \pm 1) = 0 \quad \text{für} \quad |x| \leq 1, \quad u(\pm 1, y) = 1 - y^2 \quad \text{für} \quad |y| \leq 1 \quad (46)$$

vorgelegt; \mathfrak{B} ist dabei das Quadrat $|x| < 1, |y| < 1$, $u(x, y)$ läßt sich deuten als stationäre Temperaturverteilung in einer quadratischen Platte mit gegebenen Randtemperaturen.

In dem Ansatz, in dem Q das Quadrat $0 < x < 1, 0 < y < 1$ bedeutet und die Symmetrien der Aufgabe berücksichtigt sind,

$$J = \iint_Q (\Delta w)^2 dx dy + k \left\{ \int_0^1 [w(x, 1)]^2 dx + \int_0^1 [w(1, y) + y^2 - 1]^2 dy \right\} \quad (47)$$

ist zunächst das Gewicht k geeignet zu wählen. Eine Hilfsfunktion z nach (41) ist hier z.B.

$$z = \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \quad \text{mit} \quad A = 1.$$

Wegen $c=0, z_0 = \frac{1}{2}, 0 \leq z_0 - z \leq \frac{1}{2}$ lautet (44) $|\varepsilon| \leq \delta_1 + \frac{1}{2} \delta$, d.h. ein Fehler δ in der Differentialgleichung geht hier mit dem halben Gewicht wie ein Fehler δ_1 in der Randbedingung in die Fehlerschranke $|\varepsilon|$ ein; wir wählen daher $k=2$.

Für w werde ein Ansatz gemacht

$$w = a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + a_4 (x^4 + y^4) + a_5 x^2 y^2.$$

(Es würde vielleicht näherliegen, $a_4 x^4 + a_5 y^4$ an Stelle von $a_4 (x^4 + y^4)$ zu schreiben, aber es ergibt sich sogleich $a_4 = a_5$); man kann nun w in (47) einsetzen und die Gleichungen (29) bilden;

etwas bequemer ist es, direkt die Gleichungen (37) aufzustellen:

$$\begin{aligned} 30a_1 + 20a_2 + 20a_3 + 36a_4 + 10a_5 &= 10 \\ 140a_1 + 336a_2 + 280a_3 + 1016a_4 + 196a_5 &= 70 \\ 140a_1 + 280a_2 + 336a_3 + 1016a_4 + 196a_5 &= 14 \\ 378a_1 + 1620a_2 + 1428a_3 + 7532a_4 + 1326a_5 &= 210 \\ 210a_1 + 588a_2 + 588a_3 + 2652a_4 + 518a_5 &= 42 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} a_1 &= w(0,0) = \frac{7511}{18281} = 0,41086, \\ a_2 &= 0,50011, \quad a_3 = -0,49989, \quad a_4 = 0,09692, \quad a_5 = -0,58196. \end{aligned}$$

Für die so bestimmte Funktion w wird

$$\Delta w = 2(a_2 + a_3) + 2(6a_4 + a_5)(x^2 + y^2) = \frac{8 - 15(x^2 + y^2)}{18281}$$

es ist daher $-0,00121 \leq \Delta w \leq 0,00044$

$$\text{mit} \quad |\Delta w| \leq \delta = \frac{22}{18281} \approx 0,001203.$$

Ferner brauchen wir zur Fehlerabschätzung den Randfehler; es ist

$$\begin{aligned} w(x, 1) &= a_1 + a_3 + a_4 + (a_2 + a_5)x^2 + a_4 x^4 = \frac{1}{8 \cdot 18281} (1155 - 11970x^2 + 14175x^4) \\ w(1, y) + y^2 - 1 &= \frac{1}{8 \cdot 18281} (1155 - 11970y^2 + 14175y^4). \end{aligned}$$

Der Fehler $\varepsilon = w - u$ liegt am Rande zwischen den Schranken $-0,0094$ und $\frac{420}{18281} = 0,02298$; für die Funktion $w^* = w + 0,0068$ würde $\varepsilon^* = w^* - u$ am Rande zwischen $-0,0162$ und $+0,0162$

schwanken, so daß man $\delta_1 = 0,0162$ und damit für $|\varepsilon^*|$ die für den ganzen Bereich gültige Schranke $0,0162 + \frac{1}{2} 0,00121$ oder $0,0169$ (man könnte auch $0,0168$ erreichen) erhielte. Für u ergeben sich damit die Schranken

$$w - 0,0237 \leq u \leq w + 0,0101.$$

Diese Fehlerabschätzung gilt für das ganze Quadrat und gibt die Größenordnung des Fehlers richtig wieder, da ja in der Ecke tatsächlich w um $0,02298$ von u abweicht. (In den Ecken liegt eine Singularität von u vor, da wegen der Randwerte dort

$$\Delta u = \frac{d^2}{dy^2} (1 - y^2) = -2$$

ist, während im Felde $\Delta u = 0$ sein soll).

Eingegangen am 1. Oktober 1951.

Über die Entstehung von Ringwellen an einer Flüssigkeitsoberfläche durch unter dieser gelegene, kugelige periodische Quellensysteme*.

Von Hsien Chih Liu in Schantung, China

In einer idealen, nur der Wirkung der Erdschwere unterworfenen Flüssigkeit mit unendlich ausgedehnter freier Oberfläche und unbegrenzter Tiefe wird eine unter der Flüssigkeitsoberfläche gelegene, kugelige periodische Quelle als Störungszentrum angenommen. Für den Fall, daß die Zeit über allen Grenzen wächst, wird die dadurch hervorgerufene Oberflächenerhebung aus dem Geschwindigkeitspotential der Quelle aufgestellt. Das Verfahren wurde auch auf den Fall angewandt, daß die Ergiebigkeit der Quelle über einer senkrechten Strecke gleichförmig verteilt ist.

In an ideal liquid with infinitely extended free surface and infinite depth, a spherical source, situated below the surface, is acting periodically as centre of perturbation. The only external force is gravity. The resulting displacement of the surface is computed from the velocity potential of the source, if the time coordinate is indefinitely increased. The method was also applied to the case, that the source is equally extended to a straight line, normal to the surface.

* Aus einer von der Mathematik-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen angenommenen Dissertation.

Dans un liquide imaginaire, soumis seulement à l'influence de la pesanteur de la terre, à surface libre et étendue à l'infini et à profondeur illimitée, une source périodique de la forme d'une boule située au-dessous de la surface du liquide est supposée comme centre de trouble. Au cas que le temps croît au-delà de toutes limites, l'élévation de la surface causée par cet accroissement, est constituée du potentiel de vitesse de la source. La méthode fut aussi appliquée au cas que le rendement de la source est distribué également sur une étendue verticale.

В идеальной жидкости, находящейся под влиянием только земного притяжения, с неограниченной свободной поверхностью и неограниченной глубины, принимается в качестве возмущающего центра сферический, периодический источник, расположенный под поверхностью жидкости. Вызываемое этим возвышение поверхности устанавливается из потенциала скорости источника на случай беспредельного возрастания времени. Способ применяется и к тому случаю, когда эффективность источника равномерно распределена над вертикальным отрезком.

1. Einleitung

Mit der Entstehung von Ringwellen durch einen kurzen Anstoß auf eine Flüssigkeitsoberfläche haben sich zuerst Cauchy¹⁾ und Poisson befaßt. Dabei wurde die Störungsstelle als unendlich klein angenommen; die Stoßkraft ist in ihrer Größe jedoch beschränkt. Wegen der großen mathematischen Schwierigkeit wurde die Behandlung noch weiter spezialisiert. Es wurde vorausgesetzt, daß einerseits die Wirkungskdauer der Stoßkraft als sehr klein betrachtet wird und andererseits die Wirkungskdauer der Stoßkraft als sehr groß zugelassen ist, aber nur die Wellen in großer Entfernung von der Störungsstelle studiert werden. Dieselbe Untersuchung haben später Widenbauer²⁾ und Hinze³⁾ hinsichtlich der mathematischen Behandlung mit geringeren Einschränkungen der Bedingungen wesentlich erweitert.

Über die Erzeugung von Oberflächenwellen durch eine unter der Flüssigkeitsoberfläche befindliche Störung hat Holstein⁴⁾ sich mit einer horizontal liegenden pulsierenden Quelllinie beschäftigt. In seiner Ausführung wurde die Behandlung auf den zweidimensionalen Fall beschränkt. Trotz der geraden Front der so entstehenden Wellenzüge hat seine Untersuchung hinsichtlich der Art der Entstehungsursache doch enge Verwandtschaft mit der vorliegenden Arbeit. Für einen Vergleich der Wirkung von Störungen auf und unter der Flüssigkeitsoberfläche seien noch die Veröffentlichungen von Schuler⁵⁾ und Dimpker⁶⁾ erwähnt.

2. Voraussetzungen, Randbedingungen und Problemstellung

Im Falle einer wirbelfreien, nur der Wirkung konservativer Kräfte unterworfenen Strömung geht man von der Bernoullischen Gleichung aus:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \frac{p}{\rho} = F(t) \quad (1).$$

Dabei bedeutet: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ = Quadrat des Geschwindigkeitsbetrages, Φ das Geschwindigkeitspotential, U das Kraftpotential, p der Druck, ρ die Dichte und $F(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit. Wenn man die willkürliche Funktion $F(t)$ in dem Wert von $\partial \Phi / \partial t$ einbegriffen betrachtet und sich auf kleine Ausschläge der Flüssigkeitsteilchen beschränkt, so daß v^2 in Gleichung (1) vernachlässigt werden kann, folgt weiterhin mit $U = -gz$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - gz + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (2).$$

Dabei bezeichnet z die Koordinate, die in die Richtung der Erdbeschleunigung g fällt. Bezeichnet man nun mit ζ die Erhebung der Oberfläche über den ungestörten Spiegel, so folgt aus (2) mit $z = \zeta$ und $p = 0$ (da der atmosphärische Luftdruck an der Oberfläche überall derselbe ist)

$$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{gültig für } z = \zeta) \quad (3),$$

die angenähert auch für $z = 0$ gilt.

Weiter darf bei den vorausgesetzten kleinen Amplituden bzw. kleinen Krümmungen der Oberfläche

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{gültig für } z = 0) \quad (4)$$

¹⁾ H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, V. Aufl., S. 406, Art. 255.

²⁾ Z. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 321.

³⁾ Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 143.

⁴⁾ Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), S. 38.

⁵⁾ Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 65.

⁶⁾ Annalen der Physik 19 (1934), S. 225.

gesetzt werden, als Bedingung dafür, daß die Normalkomponente der Oberflächengeschwindigkeit gleich der Normalkomponente der Teilchengeschwindigkeit an dieser Stelle sein muß. Führt man ζ aus (3) in (4) ein, so wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (\text{gültig für } z=0) \quad (5).$$

Gleichung (5) ist bekannt als die Oberflächenbedingung, wenn die Oberflächenwellen im Vergleich zu ihrer Wellenlänge kleine Amplituden haben.

Aus (3) ist ersichtlich, daß ein bestimmtes Geschwindigkeitspotential Φ eine Oberflächen-erhebung hervorrufen kann. Daher besteht die Aufgabe dieser Arbeit einfach in der Bestimmung solcher möglicher Geschwindigkeitspotentiale und damit auch des dadurch hervorgerufenen Wellenzugs für den dreidimensionalen Fall unter einem angegebenen Geschwindigkeitspotential als Ursache.

Zur Vereinfachung des Problems wollen wir unsere Behandlung grundsätzlich auf die eingeschwungenen Bewegungen beschränken. Mathematisch ausgedrückt, müssen wir dann die endgültige Lösung unseres Potentialproblems in der Gestalt

$$\Phi = \sum_{\lambda=1}^n \Phi_{\lambda}(x, y, z, t) = \sum_{\lambda=1}^n \varphi_{\lambda}(x, y, z) \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ansetzen. Wir können verschiedene Potentiale der Störung Φ_{λ} erhalten für eine Störfrequenz ω . Diese muß außer der Oberflächenbedingung (5) noch verschiedenen Bedingungen genügen⁷⁾. Die Laplace'sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

muß im ganzen in Betracht kommenden Flüssigkeitsbereich erfüllt sein. Außerdem muß man noch fordern, daß die Flüssigkeitsbewegungen in großen Tiefen unbeschränkt abklingen. Das ergibt für die Vertikalgeschwindigkeit die Bedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{gültig für } z \rightarrow \infty) \quad (8).$$

3. Eine kugelige, periodische Quelle als Entstehungsursache

a) Die Bestimmung der Geschwindigkeitspotentiale. In einem allseitig unendlich ausgedehnten Flüssigkeitsbereich ist das Geschwindigkeitspotential einer kugeligen, periodischen Quelle gegeben durch:

$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi R_1} \cos \omega t \quad (9).$$

Dabei bedeutet Q die Ergiebigkeit der Quelle, R_1 den Radiusvektor vom Quellpunkt $R_1=0$ aus, t die Zeit und ω die Kreisfrequenz. Der Ursprung $R_1=0$ von der Quelle ist ein singulärer Punkt des Potentials Φ_1 . Wir stellen uns nun die Aufgabe, die durch eine solche periodische Quelle hervorgerufene Oberflächen-erhebung zu bestimmen, wenn die Flüssigkeit eine freie Oberfläche besitzt und der Wirkung der Erdschwere unterliegt. Die Flüssigkeitsbewegung in unmittelbarer Umgebung der Quelle wird durch die Wirkung von Φ_1 bestimmt sein, während im übrigen Flüssigkeitsbereich noch zusätzliche Potentiale existieren werden, deren Bestimmung unsere nächste Aufgabe sein wird. Wir legen ein zylindrisches Koordinatensystem folgendermaßen fest (Bild 1): Die r -Achse liegt in der freien Oberfläche und weist von dem Nullpunkt $r=0$ radial nach außen. Die z -Achse weist in Richtung der Erdbeschleunigung g . Der Quellpunkt liegt bei $r=0, z=h$, wobei der Wert h kurz mit „Eintauchtiefe der Quelle“ benannt und als Parameter betrachtet wird. Für den vom Quellpunkt ausgehenden Radiusvektor R_1 gilt offenbar die geometrische Beziehung

$$R_1^2 = r^2 + (z-h)^2 \quad (10).$$

Durch die Einführung eines zylindrischen Koordinatensystems nimmt die Kontinuitäts-gleichung die folgende Gestalt an

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (11).$$

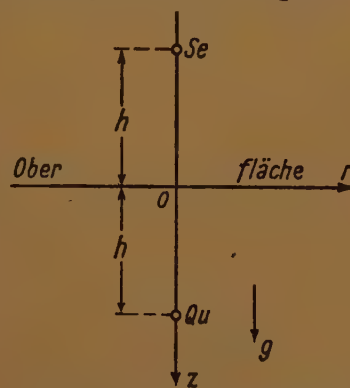


Bild 1. Festlegung des Koordinatensystems (r, z) und der Quelle Qu im Flüssigkeitsbereich

⁷⁾ Vgl. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, den Abschnitt „Oberflächenwellen“.

Die übrigen Gleichungen haben ihre ursprüngliche Gestalt beibehalten. Jedoch muß man jetzt statt $\Phi_\lambda(x, y, z; t)$ und $\xi(x, y; t)$ schreiben $\Phi_\lambda(r, z; t)$ und $\xi(r; t)$.

Um die Randbedingungen an der Oberfläche zu erfüllen spiegeln wir die Quelle an der Oberfläche. Diese Quelle ist dann gegeben durch das Potential

$$\Phi_2 = -\frac{Q}{4\pi R_2} \cos \omega t \quad (12),$$

wobei

$$R_2^2 = r^2 + (z+h)^2 \quad (13)$$

gesetzt ist. Durch Einführung des zweiten Potentials Φ_2 ist also die freie Flüssigkeitsoberfläche $z=0$ durch die folgenden Beziehungen ausgezeichnet

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \quad (\text{gültig für } z=0) \quad (14)$$

und

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{Q \cdot h}{4\pi(r^2 + h^2)^{3/2}} \cos \omega t \quad (\text{gültig für } z=0) \quad (15).$$

Mit Rücksicht auf (11) wählen wir als drittes Potential die unter dem Ausdruck „Potential der freien Welle“ bekannte Form⁸⁾

$$\Phi_3 = A J_0(\lambda r) \cdot e^{-\lambda z} \sin \omega t \quad (16),$$

wobei A ein willkürlicher Faktor und $J_0(\lambda r)$ die Besselsche Funktion nullter Ordnung bedeuten.

Das Einsetzen von Φ_3 in (5) ergibt für λ die Bestimmungsgleichung

$$\lambda = \frac{\omega^2}{g} \quad (17),$$

damit Φ_3 allen vorgeschriebenen Bedingungen genügt.

Da die Oberflächenbedingung (5) noch nicht durch die Summe $\Phi_1 + \Phi_2$ erfüllt ist, wählen wir zweckmäßig ein weiteres Potential vom Typ Φ_3 , aber nach Fourier verallgemeinert

$$\Phi_4 = \int_0^\infty f(\xi) \cdot J_0(\xi r) \cdot e^{-\xi z} d\xi \cdot \cos \omega t \quad (18),$$

worin die Funktion $f(\xi)$ uns die erforderliche Anpassungsmöglichkeit bietet. Das Einsetzen der Summe $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4$ in die Oberflächenbedingung (5) liefert

$$\int_0^\infty \left(\xi - \frac{\omega^2}{g} \right) f(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \frac{Q \cdot h}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (19).$$

Wenn man die bekannte Beziehung⁹⁾

$$\int_0^\infty e^{-\xi h} J_0(\xi r) d\xi = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

beiderseits nach dem Parameter h differenziert, was nach dem Leibnizschen Satz¹⁰⁾ durchaus erlaubt ist, dann erhält man

$$\int_0^\infty e^{-\xi h} J_0(\xi r) \xi d\xi = \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad (20).$$

Die Kombination der Gleichungen (19) und (20) liefert uns die gesuchte Funktion

$$f(\xi) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\xi}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} e^{-\xi h} \quad (21).$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (18) wird schließlich das vierte Potential

$$\Phi_4 = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(h+z)\xi} \frac{\xi}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} J_0(\xi r) d\xi \cdot \cos \omega t \quad (22).$$

Jetzt sind alle Bedingungen durch die vier Potentiale erfüllt und damit kann das Potentialproblem im Prinzip als gelöst betrachtet werden. Es bleibt noch die Ausführung der Integration des Potentials Φ_4 .

⁸⁾ H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 483. Teubner 1931.

⁹⁾ G. N. Watson: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922, page 384ff.

¹⁰⁾ W. F. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie 1, S. 120. Teubner 1928.

b) Das Potential Φ_4 im Gebiet großer Entfernung. In Gleichung (22) wollen wir benennen

$$I = \int_0^{\infty} e^{-(h+z)\xi} \frac{\xi}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} J_0(\xi r) d\xi \quad \dots \quad (23).$$

Da wir zunächst das Potential Φ_4 im Gebiet großer Entfernung vom Koordinatenursprung errechnen wollen, sind wir berechtigt, $J_0(\xi r)$ durch seine asymptotische Näherung*) zu ersetzen, somit gilt

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^{\infty} e^{-(h+z)\xi} \frac{\sqrt{\xi} \cdot \cos\left(\xi r - \frac{\pi}{4}\right)}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} d\xi \quad \dots \quad (24).$$

Hierin führen wir statt ξ die neue Variable $u = \sqrt{\xi}$ ein und schreiben $v = h + z - ir$. Außerdem setzen wir I gleich dem reellen Teil einer komplexen Funktion und somit wird

$$I = \operatorname{Re} \left\{ 2 \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-v u^2} \frac{u^2}{u^2 - \frac{\omega^2}{g}} du \right\} \quad \dots \quad (25).$$

Nun schreiben wir

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-v u^2} \frac{u^2}{u^2 - \frac{\omega^2}{g}} du \quad \dots \quad (26).$$

Denken wir uns nun in der komplexen u -Ebene eine lückenlose Kontur (Bild 2) zusammengesetzt aus der reellen Achse von Null bis R , wobei $R^2 \gg \frac{\omega^2}{g}$ ist und der singuläre Punkt $u = \frac{\omega}{\sqrt{g}}$ mittels eines halben nach oben gerichteten Kreisbogens umgegangen wird, ferner aus einem

Kreisbogen von R bis $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ und einer Geraden, die von $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ bis Null zurückführt¹¹⁾. Innerhalb des von dieser Kontur eingeschlossenen Bereiches ist der Integrand regulär, und nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral an der Kontur entlang gleich Null. Auf dem Kreisbogen von R bis $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ bleibt $\operatorname{Re}(v u^2) > 0$, so daß der Betrag des zugehörigen Integrals mit $R \rightarrow \infty$ nach Null geht. Wie bekommen also für das Integral

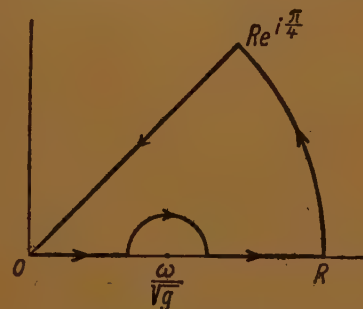


Bild 2. Integrationsweg in der komplexen u -Ebene

$$I_1 = i\pi \frac{\omega}{2\sqrt{g}} e^{-v \frac{\omega^2}{g}} + \int_0^{\infty} e^{-v u^2} \frac{u^2}{u^2 - \frac{\omega^2}{g}} du \quad \dots \quad (27)$$

In (27) stellt das erste Glied rechts das halbe Residuum für den Punkt $u = \frac{\omega}{\sqrt{g}}$ dar. In dem letzten Integral von (27) können wir den Integrationsweg durch eine beliebige unter dem Winkel φ von Null aus nach unendlich gezogene Gerade ersetzen, solange nur $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ bleibt. Das Ergebnis wird unabhängig von φ sein. Schreiben wir deshalb $u^2 = \frac{\eta^2}{\alpha} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, $iv = \alpha$, $\frac{\omega^2}{ig} = \beta^2$ und

*) Abschätzung des Restgliedes wird im Abschnitt (e) ausgeführt.

¹¹⁾ Vgl. Frank und Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 1. 2. Aufl. (1930), S. 145.

setzt man weiter $\alpha\beta^2 = \lambda^2$, so bekommt man

$$I_1 = i\pi \frac{\omega}{2\sqrt{g}} e^{-\nu \frac{\omega^2}{g}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} \frac{\eta^2}{\eta^2 - \lambda^2} d\eta \dots \dots \dots (28).$$

Die Integration kann ausgeführt werden und liefert:

$$I_1 = i\pi \frac{\omega}{2\sqrt{g}} e^{-\nu \frac{\omega^2}{g}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + i\pi \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda^2} + \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{2^n \lambda^{2n+2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \right) \dots (29).$$

Wenn ν , α und λ in I_1 beseitigt werden, erhält man aus (25), (26) und (29)

$$I = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{2}{r}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[2i\omega \sqrt{\frac{\pi}{g}} e^{-(h+z-ir)\frac{\omega^2}{g}} + \frac{1}{h+z-ir} \left(1 + \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\left[\frac{2\omega^2}{g} (h+z-ir) \right]^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \right) \right] \right\} \dots (30).$$

Kehren wir zu unseren Ausgangsbezeichnungen zurück, so erhalten wir für das Potential Φ_4 in großer Entfernung von dem Koordinatenursprung schließlich:

$$\Phi_{4g} = \frac{Q}{2\pi\sqrt{r}} \left\{ 2\omega \sqrt{\frac{\pi}{g}} e^{-(h+z)\frac{\omega^2}{g}} \left(\cos \frac{\omega^2}{g} r - \sin \frac{\omega^2}{g} r \right) + \frac{\cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h+z} + \sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h+z}}{[(h+z)^2 + r^2]^{1/4}} \right. \\ + \frac{\cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h+z} + \sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h+z}}{[(h+z)^2 + r^2]^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\left(2 \frac{\omega^2}{g} \sqrt{(h+z)^2 + r^2} \right)^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \\ \times \cos (n+1) \operatorname{arctg} \frac{r}{h+z} + \frac{\sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h+z} - \cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h+z}}{[(h+z)^2 + r^2]^{1/4}} \\ \left. \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\left(2 \frac{\omega^2}{g} \sqrt{(h+z)^2 + r^2} \right)^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \cdot \sin (n+1) \operatorname{arctg} \frac{r}{h+z} \right\} \cos \omega t \quad (31).$$

Hier bedeutet der Index g von Φ_{4g} das Gebiet großer Entfernung von dem Koordinatenursprung.

c) Die stehenden Wellen im Gebiet großer Entfernung. Wenn (31) in (3) eingesetzt und die Bedingung $z=0$ beachtet wird, dann ergibt die Gleichung der stehenden Wellen in großem Abstand von dem Koordinatenursprung

$$\zeta_{4g} = -\frac{Q}{2\pi h\sqrt{gr}} \left\{ 2\sqrt{\frac{\omega^2}{g} h} e^{-\frac{\omega^2}{g} h} \cos \left(\frac{\omega^2}{g} r + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h} + \cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h}}{\left[1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right]^{1/4}} \right. \\ + \frac{\sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h} + \cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h}}{\left[1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right]^{1/4}} \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\left(2 \frac{\omega^2}{g} h \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2} \right)^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \\ \times \cos (n+1) \operatorname{arctg} \frac{r}{h} + \frac{\sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h} - \cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{r}{h}}{\left[1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right]^{1/4}} \times \\ \left. \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\left(2 \frac{\omega^2}{g} h \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2} \right)^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \cdot \sin (n+1) \operatorname{arctg} \frac{r}{h} \right\} \sin \omega t \quad (32).$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß Φ_1 und Φ_2 an der Oberflächenerhebung der Flüssigkeit nicht direkt beteiligt sind.

Für das Gebiet von sehr großer Entfernung kann h gegenüber r vernachlässigt werden, was selbstverständlich ist, weil für die Entstehung bemerkbarer Wellenausschläge der Wert der Eintauchtiefe h nach oben begrenzt sein muß. Damit erhält man mit $\arctg \frac{r}{h} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ die folgende einfachere Formel

$$\zeta_{4\infty} = -\frac{Q\omega}{\pi g r \sqrt{2}} \left\{ 2 \sqrt{\pi \frac{\omega^2}{g} r} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g} h} \cos \left(\frac{\omega^2}{g} r + \frac{\pi}{4} \right) + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(2 \frac{\omega^2}{g} r \right)^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cos (n+1) \frac{\pi}{2} \right\} \sin \omega t \quad (33).$$

Jetzt kehren wir zur Diskussion der Gleichung (32) zurück. Gleichung (32) besteht wesentlich aus zwei Multiplikationsfaktoren, von denen der eine nur von der räumlichen Veränderung r , der zweite nur von der Zeit abhängt, und zwar so, daß das Produkt zeitlich periodisch ist und bei der Deutung von $\zeta_{4\omega}$ als Verrückung harmonische Bewegungen der einzelnen Punkte des in Frage kommenden Raumbereichs darstellt. Zur graphischen Darstellung von (32) ist es praktisch, sich vorzustellen, daß die kugelige Quelle um eine mittlere Amplitude mit der Kreisfrequenz ω atmet. Um ein Momentbild herzustellen, setzen wir willkürlich der Beseitigung des negativen Vorzeichens zuliebe $\omega t = \frac{3\pi}{2}$. Der Bequemlichkeit halber zerlegen wir (32) in die folgenden einzelnen Ausdrücke

$$\begin{aligned} \eta_1 &= Q \sqrt{\frac{2}{\pi g r}} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g} h} \cos \left(\frac{\omega^2}{g} r + \frac{\pi}{4} \right), \\ \eta_2 &= \frac{Q\omega}{2\pi g \sqrt{h r}} \\ &\times \frac{\sin \frac{1}{2} \arctg \frac{r}{h} + \cos \frac{1}{2} \arctg \frac{r}{h}}{\left[1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right]^{1/4}} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(2 \frac{\omega^2}{g} h \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2} \right)^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \cos (n+1) \arctg \frac{r}{h} \right), \\ \eta_3 &= \frac{Q\omega}{2\pi g \sqrt{h r}} \\ &\times \frac{\sin \frac{1}{2} \arctg \frac{r}{h} - \cos \frac{1}{2} \arctg \frac{r}{h}}{\left[1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right]^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(2 \frac{\omega^2}{g} h \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h} \right)^2} \right)^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \sin (n+1) \arctg \frac{r}{h}. \end{aligned}$$

Für unsere numerische Auswertung setzen wir willkürlich die Ergiebigkeit der Quelle $Q = 10$ Liter/sek, die Eintauchtiefe $h = 10$ cm und $\frac{\omega^2}{g} h = 1$. Als Bereich sei noch $\frac{r}{h} = 1$ bis 11 zu wählen. Die errechneten Ergebnisse sind in Bild 3 zusammen graphisch dargestellt.

Der Faktor $\cos \left(\frac{\omega^2}{g} r + \frac{\pi}{4} \right)$ in η_1 liefert uns eine einfachharmonische Schwingung. Die Knotenpunkte bestimmt man aus der Beziehung

$$r = \frac{g}{\omega^2} \left(n + \frac{1}{4} \right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, 3 \cdots) \quad (34)$$

und die Wellenlänge beträgt

$$\bar{\lambda} = 2(r_{n+1} - r_n) = 2\pi \frac{g}{\omega^2} \quad (35).$$

Ihre Länge ist umgekehrt mit dem Quadrat der Kreisfrequenz ω proportional. Für unser Beispiel ist $\bar{\lambda} = 62,80$ cm. Das Erscheinen von \sqrt{r} im Nenner bedingt eine mit Zuwachs der Entfernung r abnehmende Amplitude für η_1 . Wie die Kurve in Bild 3 zeigt, liefert η_2 keine einfach-

harmonische Schwingung und zwar hat die untere Halbschwingung eine größere Länge als die obere, dagegen sieht die obere Halbwelle spitzer aus. Die Amplitude klingt mit Zunahme von r auch ab. Das dritte Glied η_3 ist gegenüber η_1 und η_2 vernachlässigbar klein, infolgedessen ist

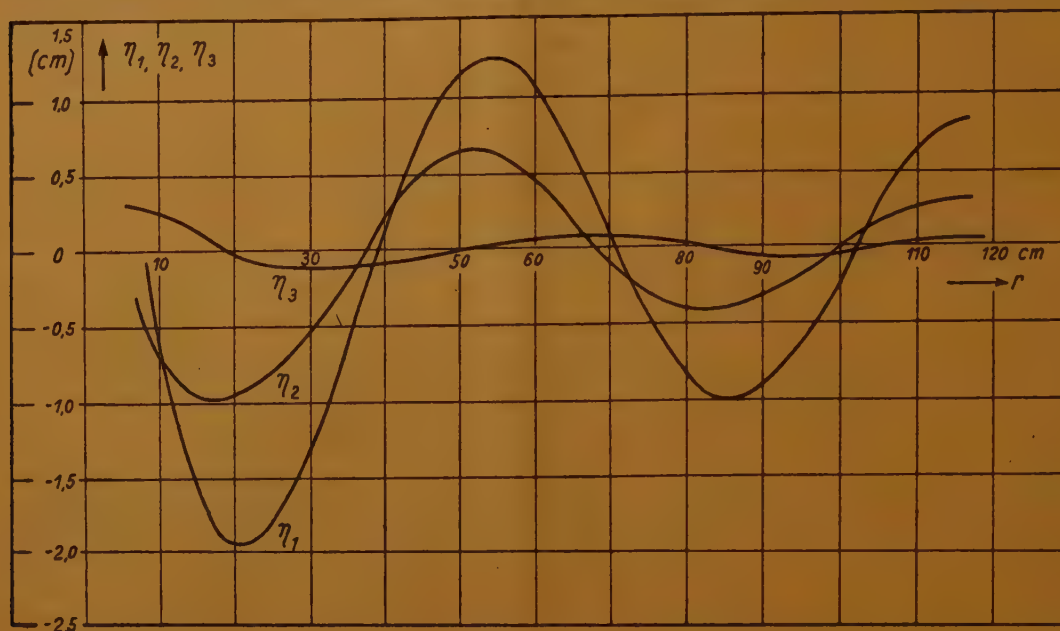


Bild 3. Momentbilder für die einzelnen Oberflächenerhebungen η_1 , η_2 und η_3 in Abhängigkeit von der Entfernung r für den Zeitpunkt $\omega t = \frac{3}{2}\pi$

das Verschwinden von η_3 in (33) bei sehr großer Entfernung tatsächlich eine richtige Folgerung. Für Abnahme der Amplitude spielt r hier dieselbe Rolle wie bei η_1 und η_2 . Die obere und untere Halbwelle von η_3 haben auch ungleiche Länge wie bei η_2 .

Die graphische Darstellung von $\zeta_{4g} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$ findet man in Bild 4 vor allem mit einem anderen Maßstab für die Ordinate. Obgleich die obere und untere Halbwelle keinen großen Unterschied in ihrer Länge haben, ist die Schwingung keine einfachharmonische, da die Kurve noch durch das Auftreten von \sqrt{r} im Nenner der Wellengleichung verzerrt ist.

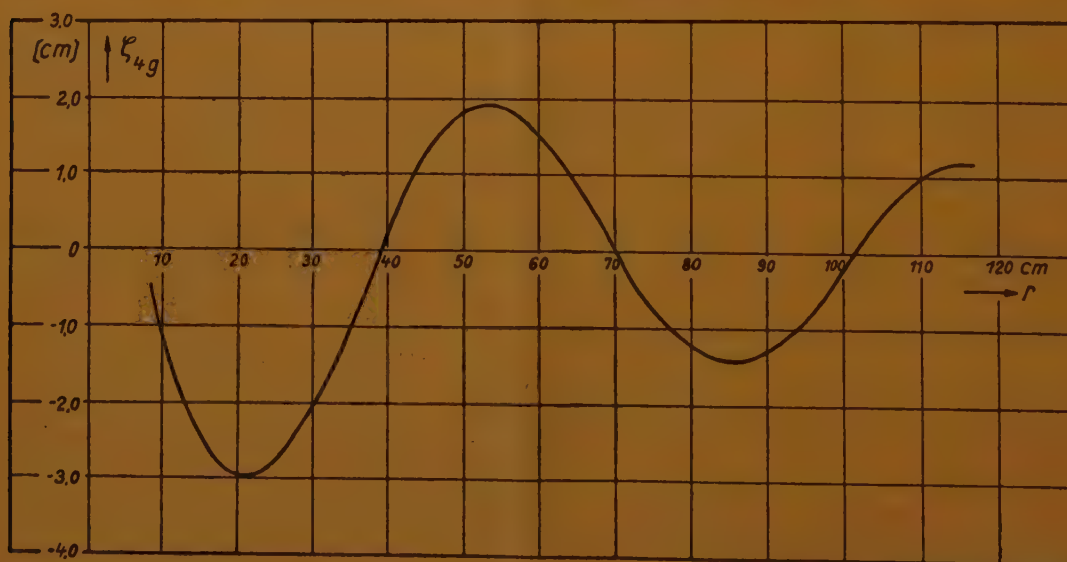


Bild 4. Momentbild für die Oberflächenerhebungen η_1 , η_2 und η_3 in Abhängigkeit von der Entfernung r für den Zeitpunkt $\omega t = \frac{3}{2}\pi$

Die errechneten Ergebnisse bekräftigen ferner, daß η_1 in ζ_{4g} seiner Größe nach erheblich dominiert. Bei vorgegebener Ergiebigkeit und Eintauchtiefe der Quelle ist es von starkem Interesse, eine passende Kreisfrequenz so festzustellen, daß η_1 seinen Größtwert annimmt. Es

ist leicht festzustellen, daß für gegebene Eintauchtiefe h

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \dots \dots \dots (36)$$

die Bedingung für ω ist, bei der η_1 sein Maximum findet, und zwar wird der maßgebende Faktor von η_{1max} nach vorstehender Gleichung für η_1

$$\left(\omega^2 \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g} h} \right)_{max} = \frac{g}{e h}.$$

Ferner sei noch darauf hingewiesen, daß, wenn der Quellpunkt an die freie Oberfläche rückt, die Wellenamplitude von η_1 in großer Entfernung bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{r}}$ proportional dem Quadrat der Kreisfrequenz der Quelle wird.

d) Die fortschreitenden Wellen im Gebiet großer Entfernung. Die Rechnung im Abschnitt c) hat gezeigt, daß η_2 und η_3 mit Zuwachs von r rasch abklingen. Daher herrscht im Gebiet sehr großer Entfernung von dem Koordinatenursprung tatsächlich nur die einfachere stehende Welle

$$\zeta_{4g} \approx -Q \sqrt{\frac{2}{\pi g r}} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g} h} \cdot \cos\left(\frac{\omega^2}{g} r + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \omega t \dots \dots \dots (37).$$

Wenn man Φ_3 aus (16) in (2) einsetzt und wiederum $J_0\left(\frac{\omega^2}{g} r\right)$ durch seine asymptotische Näherung ersetzt, dann hat man

$$\zeta_{3g} \approx -Q \sqrt{\frac{2}{\pi g r}} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g} h} \cdot \cos\left(\frac{\omega^2}{g} r - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \omega t \dots \dots \dots (38),$$

wobei der willkürliche Faktor A in Φ_3 durch Dimensionsbetrachtung und die notwendige, exponentielle Wirkung der Eintauchtiefe h bestimmt ist. Nach Kombination von (37) und (38) erhält man

$$\zeta_g = \zeta_{3g} + \zeta_{4g} \approx -Q \sqrt{\frac{2}{\pi g r}} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g} h} \cdot \cos\left(\frac{\omega^2}{g} r - \frac{\pi}{4} - \omega t\right) \dots \dots \dots (39).$$

Dieser Ausdruck repräsentiert einen fortlaufenden Wellenzug. Die Amplitude der Welle nimmt mit Zuwachs von r stets ab.

e) Abschätzung des Restgliedes von Φ_4 für große Entfernung. Im Abschnitt b) wurde die Besselsche Funktion $J_0(\xi r)$ durch ihre asymptotische Näherung $\sqrt{\frac{2}{\pi \xi r}} \cdot \cos\left(\xi r - \frac{\pi}{4}\right)$ ersetzt. Da diese Ersetzung unter dem Integral vorgenommen wird, und sich das Integrationsgebiet von Null an erstreckt, muß noch gezeigt werden, daß diese asymptotische Annäherung im vorliegenden Falle erlaubt ist.

Um die Abschätzung bequem ausführen zu können, macht man zweckmäßig die Integrationsvariable durch die Substitution $\xi r = \varepsilon$ in dem Ausdruck

$$I = \int_0^\infty e^{-(h+z)\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \frac{\omega^2}{g}} \cdot J_0(\xi r) \cdot d\xi$$

dimensionslos und erhält somit

$$I = \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-\frac{h+z}{r} \varepsilon} \frac{J_0(\varepsilon)}{1 - \frac{\omega^2 r}{g \varepsilon}} \cdot d\varepsilon.$$

Für großes Argument ε kann man schreiben

$$J_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi \varepsilon}} \cdot \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) + O(|\varepsilon|^{-3/2}),$$

und somit bedeutet die Restabschätzung, die wir gleich ausführen werden, einfach die Feststellung, ob mit Zuwachs von r und für das Intervall $0 \leq \varepsilon \leq \infty$ eine genügend kleine obere

Schranke für den Wert

$$r \cdot \Delta I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{h+z}{r}\varepsilon} \frac{J_0(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} d\varepsilon$$

existiert oder nicht. Anders gesagt muß man verlangen, daß auch $r\Delta I$ mit $r \rightarrow \infty$ gegen Null geht, da I selbst mit $1/r$ gegen Null geht.



Bild 5. Integrationsweg in der komplexen ε -Ebene

Den Integrationsweg wollen wir in der komplexen ε -Ebene (Bild 5) so wählen, daß er längs der reellen Achse von Null bis Unendlich erstreckt wird, wobei der singuläre

Punkt $\varepsilon = \frac{\omega^2}{g} r$ mittels eines halben in dem ersten Quadranten

liegenden Kreises umgegangen wird, wie die gestrichelte Linie zeigt. Für unsere Abschätzung ist es zweckmäßig das Integrationsintervall so zu zerlegen, daß er aus den Anteilen

$0 \dots 2, 2 \dots 2\left(\frac{\omega^2}{g}r - 1\right)$ [über den Halbkreis] und $2\left(\frac{\omega^2}{g}r - 1\right) \dots \infty$ besteht. Diese Zerlegung bewirkt hauptsächlich, daß in dem ersten Intervall $0 \dots 2$ sowohl $J_0(\varepsilon)$ als auch $\cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right)$ positiv bleiben. Somit erhalten wir jetzt ein Äquivalent für $r\Delta I$

$$r \cdot \Delta I = r(\Delta I_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3) = \left\{ \int_0^2 + \int_2^{2\left(\frac{\omega^2}{g}r - 1\right)} + \int_{2\left(\frac{\omega^2}{g}r - 1\right)}^{\infty} \right\} e^{-\frac{h+z}{r}\varepsilon} \frac{0(|\varepsilon|^{-3/2})}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} d\varepsilon.$$

Außerdem muß noch gezeigt werden, daß $r \cdot \Delta I$ im Pol $\varepsilon = \frac{\omega^2}{g} r$ auch beschränkt ist.

α) Abschätzung des ersten Anteils $r\Delta I_1$. Da der Wert $\frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}\right|}$ in dem Intervall $0 \leq \varepsilon \leq 2$ sich monoton ändert und

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} = -\frac{\varepsilon g}{r\omega^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon g}{r\omega^2} \right)^n \right\}$$

ist, gilt

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} \right| < \frac{2g}{r\omega^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2g}{r\omega^2} \right)^n \right\}.$$

Da ferner in diesem Intervall sowohl die Besselsche Funktion $J_0(\varepsilon)$ als auch $\cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right)$ positiv sind, so folgt offenbar die Ungleichung

$$\left| J_0(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) \right| < \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}}.$$

Daher kann man schreiben

$$|r \Delta I_1| \equiv \left| \int_0^2 e^{-\frac{h+z}{r}\varepsilon} \frac{J_0(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} d\varepsilon \right| < \frac{2g}{r\omega^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2g}{r\omega^2} \right)^n \right\} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^2 e^{-\frac{h+z}{r}\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Mit $\int_0^2 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = 2\sqrt{2}$ und $\frac{g}{\omega^2} = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi}$, wobei $\bar{\lambda}$ die Wellenlänge bedeutet, erhält man

$$|\Delta I_1| < \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{\bar{\lambda}}{r} < \frac{\bar{\lambda}}{r},$$

wobei die kleine Größe höherer Ordnung, die unter dem Summenzeichen steht, weggelassen wurde. Also ist $r \Delta I_1$ nach oben beschränkt und nimmt rasch ab, wenn $r > \bar{\lambda}$ ist.

β) Abschätzung des zweiten Anteils $r \Delta I_2$. Man kann leicht zeigen, daß die Ungleichung gilt

$$|r \Delta I_2| \equiv \left| \int_{\frac{\omega^2}{g}}^{2\left(\frac{\omega^2}{g}r-1\right)} e^{-\frac{h+z}{r}\varepsilon} \frac{J_0(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} d\varepsilon \right|$$

$$< \int_{\frac{\omega^2}{g}}^{2\left(\frac{\omega^2}{g}r-1\right)} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} \left(J_0(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) \right) d\varepsilon.$$

Da der Ausdruck in der Klammer längs des Halbkreises beschränkt ist, so folgt

$$|r \Delta I_2| \leq \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} \int_{\frac{\omega^2}{g}}^{2\left(\frac{\omega^2}{g}r-1\right)} \left(J_0(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) \right) d\varepsilon.$$

Demnach geht $r \Delta I_2$ mit $r \rightarrow \infty$ nach Null.

γ) Abschätzung des dritten Anteils $r \Delta I_3$. Längs der reellen Achse für $\varepsilon > 2\left(\frac{\omega^2}{g}r-1\right)$

und $r \gg \frac{g}{\omega^2}$ wird

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2 r}{g\varepsilon}} < 2.$$

Daher hat man

$$|r \Delta I_3| \leq 2 \int_{2\left(\frac{\omega^2}{g}r-1\right)}^{\infty} e^{-\frac{h+z}{r}\varepsilon} \left(J_0(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) \right) d\varepsilon.$$

Wendet man wieder die asymptotische Abschätzung

$$\left| J_0(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) \right| < A(|\varepsilon|^{-3/2})$$

an, welche für hinreichend große ε gültig ist, so hat man

$$|r \Delta I_3| \leq 2A \int_{2\left(\frac{\omega^2}{g}r-1\right)}^{\infty} e^{-\frac{h+z}{r}\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}.$$

Wenn man $\frac{h+z}{r}\varepsilon = \eta$ setzt, so ergibt sich

$$|r \Delta I_3| < 2A \sqrt{\frac{h+z}{r}} \int_{2\left(\frac{\omega^2}{g}r-1\right)\frac{h+z}{r}}^{\infty} e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta\sqrt{\eta}}.$$

Demnach geht $r \Delta I_3$ mit $\frac{1}{\sqrt{r}}$ gegen Null.

δ) Abschätzung des Restglieds bei dem Pol $\frac{\omega^2}{g} r$. Das Halbresidium wird

$$\pi \cdot i \cdot e^{-(h+z)} \frac{\omega^2}{g} \left(J_0 \left(\frac{\omega^2}{g} r \right) - \sqrt{\frac{2g}{\pi \omega^2 r}} \cos \left(\frac{\omega^2}{g} r - \frac{\pi}{4} \right) \right),$$

welches gemäß der Restabschätzung für die asymptotische Näherung der Besselschen Funktion $J_0(e)$ absolut kleiner als

$$\pi \cdot \text{const} |r|^{-3/2}$$

ist. Demnach ist der Rest beim Pol $\frac{\omega^2}{g} r$ auch beschränkt.

f) Das Potential Φ_4 im Gebiet kleiner Entfernung. Nach der bekannten Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-(h+z)\xi} J_0(\xi r) d\xi = \frac{1}{\sqrt{(h+z)^2 + r^2}} \quad \dots \quad (40)$$

kann man schreiben

$$I \equiv \int_0^\infty e^{-(h+z)\xi} \frac{\xi}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} J_0(\xi r) d\xi = \frac{1}{\sqrt{(h+z)^2 + r^2}} + \frac{\omega^2}{g} \int_0^\infty e^{-(h+z)\xi} \frac{J_0(\xi r)}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} d\xi \quad \dots \quad (41).$$

Setzt man ferner

$$J_0(\xi r) = \text{Re} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\xi r \cdot \sin \varphi} d\varphi \right\},$$

so folgt

$$I_1 \equiv \int_0^\infty e^{-(h+z)\xi} \frac{J_0(\xi r)}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} d\xi = \text{Re} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-(h+z-i r \cdot \sin \varphi)\xi} \frac{d\xi}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} d\varphi \right\} \quad \dots \quad (42).$$

Mit der neuen Abkürzung $\alpha = h + z - i r \cdot \sin \varphi$ wollen wir die Integration der rechten Seite von (42) zuerst nach der Variablen ξ ausführen. Den Integrationsweg wollen wir in der komplexen ξ -Ebene so wählen, daß er aus der reellen Achse von Null bis R besteht, wobei $R \gg \frac{\omega^2}{g}$ ist, und der singuläre Punkt $\xi = \frac{\omega^2}{g}$ mittels eines halben nach oben gerichteten Kreis-

bogens umgangen wird, ferner aus einem Kreisbogen von R bis $R \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ und einer Geraden, die von $R \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ wieder nach Null zurückführt. Da in dem umlaufenen Gebiet der Integrand sich überall analytisch verhält, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz das Umlaufintegral gleich Null. Auf dem Kreisbogen von R bis $R \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ bleibt $\text{Re}(\alpha) > 0$, so daß der Betrag des entsprechenden Integrals mit $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Wir bekommen also

$$I_2 \equiv \int_0^\infty e^{-\alpha\xi} \frac{d\xi}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} = i\pi e^{-\alpha \frac{\omega^2}{g}} + \int_0^{R \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}} e^{-\alpha\xi} \frac{d\xi}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} \quad \dots \quad (43).$$

Wenn man weiter $\alpha \xi e^{i\frac{\pi}{4}} = u$, $\alpha \frac{\omega^2}{g} = \beta$ und $u - \beta = t$ setzt, dann ergibt sich

$$I_3 \equiv \int_0^{R \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}} e^{-\alpha\xi} \frac{d\xi}{\xi - \frac{\omega^2}{g}} = \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{u - \beta} = e^{-\beta} \int_{-\beta}^\infty e^{-t} \frac{dt}{t} \quad \dots \quad (44).$$

Für den Hauptwert des „Exponentialintegrals“ auf der rechten Seite von (44) führen wir die Bezeichnung ein

$$\int_{\infty}^{-\beta} e^{-t} \frac{dt}{t} = Ei(\beta).$$

Für die m -te Ableitung der Ei -Funktion gilt folgende Reihenentwicklung:

$$Ei^{(m)}(\beta) = - (m-1)! e^{\beta} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{(m-n)!} \frac{1}{\beta^n}.$$

Wir bilden zweckmäßig die Taylorreihe um die Punkte $(h+z)\frac{\omega^2}{g}$ und $-i\frac{\omega^2}{g} r \cdot \sin \varphi$; denn für diese Punkte ist $Ei(\beta)$ aus Tabellen erfaßbar. Somit erhalten wir

$$Ei \left[(h+z-i r \cdot \sin \varphi) \frac{\omega^2}{g} \right] = Ei \left[(h+z) \frac{\omega^2}{g} \right] - e^{(h+z) \frac{\omega^2}{g}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{(m-n)!} \cdot \frac{\left(-i \frac{\omega^2}{g} r \right)^m}{\left[(h+z) \frac{\omega^2}{g} \right]^n} \cdot \frac{\sin^m \varphi}{m}.$$

Diese Reihe ist für die weitere Integration nach der Veränderlichen φ ohne Schwierigkeit zu gebrauchen. Damit lautet

$$I_3 = - e^{-(h+z-i r \cdot \sin \varphi) \frac{\omega^2}{g}} Ei \left[(h+z) \frac{\omega^2}{g} \right] + e^{i \frac{\omega^2}{g} r \cdot \sin \varphi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{(m-n)!} \frac{\left(-i \frac{\omega^2}{g} r \right)^m}{\left[(h+z) \frac{\omega^2}{g} \right]^n} \frac{\sin^m \varphi}{m}$$

und

$$I_2 = e^{-(h+z-i r \cdot \sin \varphi) \frac{\omega^2}{g}} \left(i \pi - Ei \left[(h+z) \frac{\omega^2}{g} \right] \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m+n}}{(m-n)!} \frac{\left(i \frac{\omega^2}{g} r \right)^{l+m}}{\left[(h+z) \frac{\omega^2}{g} \right]^n} \frac{\sin^{l+m} \varphi}{(l!) m} \quad (43a).$$

Jetzt wollen wir die Integration in (42) nach der Variablen φ ausführen. Für die Integration des halben Residuums des singulären Punktes $\xi = \frac{\omega^2}{g}$ in der komplexen ξ -Ebene und des Koeffizienten von $Ei \left[(h+z) \frac{\omega^2}{g} \right]$ in (43a) benutzen wir die Reihenentwicklung nach den Besselschen Funktionen¹²⁾

$$e^{i \frac{\omega^2}{g} r \cdot \sin \varphi} = J_0 \left(\frac{\omega^2}{g} r \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{\omega^2}{g} r \right) \cdot \cos(2n\varphi) + 2i \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1} \left(\frac{\omega^2}{g} r \right) \cdot \sin(2n+1)\varphi$$

und damit erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i \frac{\omega^2}{g} r \cdot \sin \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} J_0 \left(\frac{\omega^2}{g} r \right) + 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} J_{2n+1} \left(\frac{\omega^2}{g} r \right) \quad \dots \quad (45).$$

Das letzte Glied von (43a) ist ein Polynom von $\sin \varphi$, das für die nahe Umgebung des Koordinatenursprungs gut konvergiert. Für die Integration von diesem Glied benutzt man vorwiegend die beiden folgenden von Wallis eingeführten Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi \cdot d\varphi &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \cdot d\varphi &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (n > 0, \text{ ganz}).$$

¹²⁾ Webster-Szegö: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, S. 373, 1930.

Damit können wir schließlich den vollständigen Ausdruck des Potentials Φ_4 aufstellen; er gilt im ganzen Flüssigkeitsbereich. Mithin wird

$$\Phi_4 = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(h+z)^2 + r^2}} - \frac{\omega^2}{g} \cdot e^{-(h+z)\frac{\omega^2}{g}} \left(J_0\left(\frac{\omega^2}{g} r\right) \cdot E i\left[(h+z)\frac{\omega^2}{g}\right] + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} J_{2n+1}\left(\frac{\omega^2}{g} r\right) \right) + Re \left[\frac{2\omega^2}{\pi g} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m+n} i^{l+m}}{(m-n)! m(l!)} \cdot \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} r\right)^{l+m}}{\left[(h+z)\frac{\omega^2}{g}\right]^n} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{l+m} \varphi \cdot d\varphi \right] \cos \omega t \right\} \quad (46).$$

g) Die stehenden Wellen im Gebiet kleiner Entfernung. Für die Oberflächen-erhebung der Flüssigkeit im Gebiet kleiner Entfernung, die von Φ_4 verursacht wird, erhalten wir gemäß Gleichung (3)

$$\zeta_{4k} = -\frac{Q \cdot \omega}{2\pi g h} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \sin \omega t \quad \dots \quad (47).$$

worin

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}},$$

$$\mu_2 = -\frac{\omega^2}{g} h \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g} h} \left(J_0\left(\frac{\omega^2}{g} r\right) \cdot E i\left(\frac{\omega^2}{g} h\right) + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} J_{2n+1}\left(\frac{\omega^2}{g} r\right) \right),$$

$$\mu_3 = Re \left[\frac{2\omega^2}{\pi g} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m+n} i^{l+m}}{(m-n)! m(l!)} \cdot \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} r\right)^{l+m}}{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^n} \int_0^{\pi/2} \sin^{l+m} \varphi \cdot d\varphi \right].$$

Streng genommen gilt Gleichung (47) für den ganzen in Frage kommenden Flüssigkeitsbereich. Aus Konvergenzgründen aber können wir (47) praktisch nur auf das Gebiet kleiner Entfernung von dem Koordinatenursprung anwenden. Infolgedessen wurde ζ_{4k} zwecks Unterscheidung von ζ_{4l} mit einem Index k (k bedeutet das Gebiet kleiner Entfernung) versehen.

Man beachte, daß bei der Auswertung von μ_3 nur gerade Zahlen von $l+m$ in Frage kommen, da ungerade Zahlen imaginäre Werte bewirken. Mithin hat man

$$\mu_3(l=0) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^{v+1}}{v!} \left(\frac{r}{h}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^{v+1}}{v!} \left(\frac{r}{h}\right)^4$$

$$- \frac{1}{6} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^{v+1}}{v!} \left(\frac{r}{h}\right)^6 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^{v+1}}{v!} \left(\frac{r}{h}\right)^8 - + \dots$$

$$\mu_3(l=1) = -\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^{v+2}}{v!} \left(\frac{r}{h}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^{v+2}}{v!} \left(\frac{r}{h}\right)^4$$

$$- \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^{v+2}}{v!} \left(\frac{r}{h}\right)^6 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\left(\frac{\omega^2}{g} h\right)^{v+2}}{v!} \left(\frac{r}{h}\right)^8 - + \dots$$

Sinngemäß läßt sich diese Reihe ohne Schwierigkeit für höhere Werte von l hinschreiben. Für den festgelegten Wert $\frac{\omega^2}{g} h = 1$ vereinfacht sich die Summation der erhaltenen Reihen:

$$\mu_3 = -0,50000 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + 0,15625 \left(\frac{r}{h}\right)^4 - 0,06682 \left(\frac{r}{h}\right)^6 + 0,04001 \left(\frac{r}{h}\right)^8 - 0,02773 \left(\frac{r}{h}\right)^{10} + 0,02068 \left(\frac{r}{h}\right)^{12} - 0,01612 \left(\frac{r}{h}\right)^{14} + 0,01309 \left(\frac{r}{h}\right)^{16} - 0,01089 \left(\frac{r}{h}\right)^{18} + 0,00925 \left(\frac{r}{h}\right)^{20} - 0,00778 \left(\frac{r}{h}\right)^{22} + 0,00699 \left(\frac{r}{h}\right)^{24} - 0,00618 \left(\frac{r}{h}\right)^{26} + 0,00543 \left(\frac{r}{h}\right)^{28} - 0,00488 \left(\frac{r}{h}\right)^{30} + 0,00442 \left(\frac{r}{h}\right)^{32} - + \dots \quad (48).$$

Die Reihe (48) konvergiert bis zu dem Wert $\frac{r}{h}=1$ gut. Die Auswertung von μ_1 und μ_2 ist an Hand von Tafeln schnell auszuführen. Wie bei der Untersuchung für das Gebiet großer Entfernung, setzen wir auch $\omega t = \frac{3}{2}\pi$. Nachdem μ_1 , μ_2 und μ_3 einzeln ausgewertet sind, muß man sie noch mit dem gemeinsamen Faktor $B = \frac{Q \cdot \omega}{2\pi g h}$ multiplizieren.

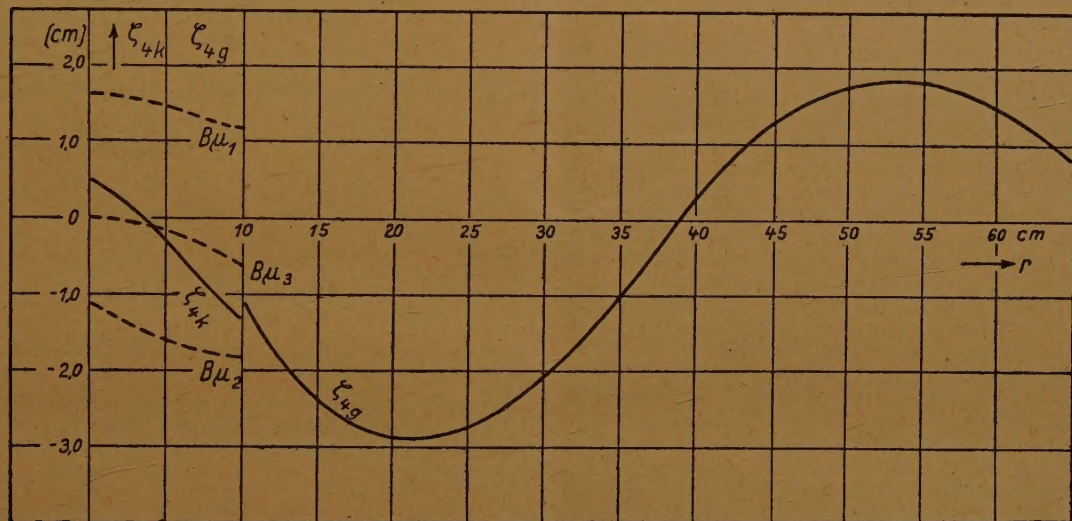


Bild 6. Momentbilder für die Oberflächenerhebungen ζ_{4k} und ζ_{4g} in Abhängigkeit von der Entfernung r für den Zeitpunkt $\omega t = \frac{3}{2}\pi$

Das errechnete Ergebnis ζ_{4k} ist auf der linken Seite des Bildes 6 graphisch aufgetragen. In demselben Bild findet man rechts auch einen Teil von ζ_{4g} (g bedeutet große Entfernung). Beispielsweise bei $r=10$ cm beträgt die Differenz $|\zeta_{4k} - \zeta_{4g}| = 1,396 - 1,143 = 0,253$ cm, und wenn sich dieser Unterschied auf ζ_{4k} bezieht, beträgt sie etwa 18%. Das heißt, die Näherungsformel für ζ_{4g} ist für die Entfernung $r=h$ unter Umständen nicht recht befriedigend.

Aus (47) ist es auch ersichtlich, daß der Punkt $z=0$, $r=0$ nur dann singulär wird, wenn die Quelle der Oberfläche unendlich nahe rückt. Im ganzen Gebiet ist μ_1 unabhängig von der Kreisfrequenz und μ_3 klein gegen μ_2 . Das Glied $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}}$ hat keinen Wellencharakter; es spielt

nur die Rolle einer mit der Quelle phasengleichen Grundform der Oberfläche. Die Wellenerscheinung ist daher hauptsächlich durch die Überlagerung von Besselschen Funktionen nullter und verschiedener ungerader Ordnungen charakterisiert. Ferner läßt sich noch feststellen, daß aus der Beziehung $\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{h}}$ die Grenzbeziehung $\left(\omega^3 e^{-\frac{\omega^2}{g} h}\right)_{\max} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{h e}\right)^{3/2}$ folgt. Wenn der Quellpunkt an die freie Oberfläche rückt, wird $B\mu_2$ im Gebiet kleiner Entfernung der dritten Potenz der Kreisfrequenz ω proportional sein.

h) Die fortschreitenden Wellen im Gebiet kleiner Entfernung. Man kann ferner noch zu dem Ausdruck ζ_4 (47) die Beziehung

$$\zeta_3 = -\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{\omega^3}{g^2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g} h} J_0\left(\frac{\omega^2}{g} r\right) \cdot \cos \omega t$$

hinzufügen, um die fortschreitenden Wellen zu bekommen. Mithin hat man

$$\zeta = \zeta_3 + \zeta_4 = -\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{\omega^3}{g^2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{g}h} J_0\left(\frac{\omega^2}{g}r\right) \cdot \cos \omega t - \frac{Q\omega}{2\pi g h} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \cdot \sin \omega t \quad (49).$$

Der Ausdruck (49) läßt sich schwierig zu einer einfacheren Form bringen. Für numerische Auswertung bietet er aber keine besondere Schwierigkeit.

Hat man nicht eine einzige kugelige Quelle unter der Oberfläche, sondern stetig längs der senkrechten Linie verteilte Quellen, so kann man die Integration in ähnlicher Weise durchführen. Für ein Quellsystem, das längs einer senkrechten Strecke mit konstanter Ergiebigkeit verteilt ist, hat der Verfasser im Originalexemplar seiner Dissertation (Göttingen 1945) die Rechnung durchgeführt. Aber auch noch bei vielen andern Verteilungsgesetzen läßt sich die Integration in ähnlicher Weise ausführen, wie sie in dieser Arbeit festgelegt wurde.

Eingegangen am 29. September 1951.

KLEINE MITTEILUNGEN

Brückenlösungen beim Problem der achsensymmetrischen Torsion.

Das Verfahren der erzeugenden Funktionen wurde im Falle der torsionsfreien achsensymmetrischen Deformation wiederholt erfolgreich angewendet; u. a. wurde vom Verf. für das in Frage kommende Bipotentialproblem bei Verwendung von Polarkoordinaten ein System von Brückenlösungen entwickelt¹⁾, wie sie im Falle der innen und außen belasteten Hohlkugel heranzuziehen sind. Die vorliegende Arbeit richtet sich auf die analoge Aufgabe beim Torsionsproblem und gibt damit Ergänzungen zu älteren Arbeiten von A. Föppl²⁾, Fr. A. Willers³⁾ und des Verf.⁴⁾.

Bei fehlender Massenkraft haben wir unter Anwendung von Polarkoordinaten ϱ, χ, ϑ für den Fall, daß alle Spannungen und Verschiebungen von der Meridiankoordinate ϑ unabhängig sind, als einzige den Torsionsfall charakterisierende Gleichgewichtsbedingung⁵⁾:

$$\frac{\partial \tau_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau_\chi}{\partial \chi} + \frac{1}{\varrho} (3\tau_\varrho + 2\tau_\chi \cotg \chi) = 0. \quad (1)$$

Darin bedeuten τ_ϱ, τ_χ die Komponenten der Schubspannung, die im Meridianschnitt in der Richtung der wachsenden ϱ - bzw. χ -Werte wirken. Für das Oberflächenelement des Umdrehungskörpers mit der nach außen gerichteten Normalen ν ergibt sich als Drehspannung:

$$t_\vartheta = \tau_\varrho \cos(\varrho, \nu) + \tau_\chi \cos(\chi, \nu). \quad (2)$$

Bezeichnet v die lineare Drehverschiebung irgend-eines Punktes des Rotationskörpers, so lauten die Beziehungen zwischen Spannung und Formänderung⁶⁾:

$$\tau_\varrho = G\varrho \sin \chi \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{v}{\varrho \sin \chi} \right); \quad \tau_\chi = G \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{v}{\varrho \sin \chi} \right) \quad (3)$$

Die Grundgleichung des Torsionsproblems ergibt sich durch Einsetzen der Ausdrücke (3) in die Gleichgewichtsbedingung (1). Sie nimmt bei Einführung der Drehungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} 2\tilde{\omega}_\varrho &= \frac{1}{\varrho^2 \sin \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} (v \varrho \sin \chi); \\ 2\tilde{\omega}_\chi &= -\frac{1}{\varrho \sin \chi} \frac{\partial}{\partial \varrho} (v \varrho \sin \chi) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

die Gestalt an:

$$\frac{\partial (2\tilde{\omega}_\varrho)}{\partial \chi} - \frac{\partial (2\tilde{\omega}_\chi \cdot \varrho)}{\partial \varrho} = 0, \quad (1')$$

wird also durch den Ansatz befriedigt

$$2\tilde{\omega}_\varrho = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}; \quad 2\tilde{\omega}_\chi \cdot \varrho = \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} \quad (4')$$

Koppelt man diesen Ansatz mit (4), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} (v \varrho \sin \chi) &= \varrho^2 \sin \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}; \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} (v \varrho \sin \chi) &= -\sin \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}, \end{aligned}$$

woraus

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \sin \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sin \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} \right) = 0;$$

die erzeugende Funktion φ genügt also der Laplaceschen Gleichung⁷⁾.

Nun gibt es zu jeder einem achsensymmetrischen Problem entsprechenden Potentialfunktion φ eine assoziierte „Strömungsfunktion“ ψ , die mit ihr durch die Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho^2 \sin \chi} \frac{\partial \psi}{\partial \chi}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} = -\frac{1}{\sin \chi} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}$$

verknüpft ist. Gemäß (4), (4') ist im vorliegenden Fall $\psi = v \varrho \sin \chi$. Ferner kann man⁸⁾ ein derartiges Funktionpaar sich verschaffen durch den Ansatz:

$$\varphi = -\frac{\partial(\varrho \varphi_1)}{\partial \varrho}; \quad \psi = \varrho \sin \chi \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \chi} \quad (5)$$

wo φ_1 eine achsensymmetrische Potentialfunktion. Im Falle des Problems der achsensymmetrischen Torsion gewinnt man dann anschließend⁹⁾ die Drehverschiebung $v = \frac{\psi}{\varrho \sin \chi}$; ferner $v = \frac{v}{\varrho \sin \chi}$ und die Spannungskomponenten

$$\tau_\varrho = G \varrho \sin \chi \frac{\partial v}{\partial \varrho}; \quad \tau_\chi = G \sin \chi \frac{\partial v}{\partial \chi}.$$

Wie bei der torsionsfreien achsensymmetrischen Deformation von Umdrehungskörpern beanspruchen besondere Aufmerksamkeit auch die für den Torsionsfall zu gewärtigenden Brückenlösungen, bei denen Potenzen von ϱ mit den um null liegenden Exponenten als Faktoren auftreten. Natürlich scheiden hier die nur der Bipotentialgleichung, aber nicht der Potentialgleichung genügenden Funktionen aus. Das sind, wenn wir die Lösungsbezeichnung benutzen, die vom Verf. in dem unter¹⁾ zitierten Aufsatz angewendet wurde, die folgenden:

$$A_2, B_2, B_3, D_1, D_4, H_2, H_3, H_4, T_2, U_2, U_4.$$

⁷⁾ Vgl. 1).
⁸⁾ Vgl. 4).

¹⁾ Diese Zeitschrift Bd. 30 (1950), S. 50 ff.

²⁾ München Akad. d. Wiss. Sitzungsber. 35 (1905), S. 249, 504; Zeitschr. d. V. d. I. 50 (1906), S. 1032.

³⁾ Zeitschr. Math. Phys. 55 (1907), S. 225–263.

⁴⁾ Z. angew. Math. Mech. 11 (1931), S. 8–15.

⁵⁾ A. E. H. Love, Elastizität 1907, S. 108.

⁶⁾ A. E. H. Love, Elastizität 1907, S. 67.

Es verbleiben somit die nachstehenden Lösungen:

$$\begin{aligned} [B_1] \quad \varphi_1 &= \frac{\cos \chi}{e^2}; \quad \varphi = -\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\cos \chi}{e} \right) = \frac{\cos \chi}{e^2}; \\ \psi &= e \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\cos \chi}{e} \right) = -\frac{\sin^2 \chi}{e}; \\ v &= \frac{\psi}{e \sin \chi} = -\frac{\sin \chi}{e^2}; \quad v = \frac{v}{e \sin \chi} = -\frac{1}{e^3}; \\ \tau_e &= G e \sin \chi \cdot \frac{\partial v}{\partial \varrho} = -3G \frac{\sin \chi}{e^3}; \\ \tau_\chi &= G \sin \chi \frac{\partial v}{\partial \chi} = 0. \end{aligned}$$

Diese Lösung wurde zuerst von A. Föppl⁹⁾ auf andern Wege abgeleitet.

$$\begin{aligned} [D_2] \quad \varphi_1 &= \frac{1}{e} \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}; \quad \varphi = -\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \right) = 0; \\ \psi &= e \sin \chi \cdot \frac{1}{e \sin \chi} = 1; \\ v &= \frac{1}{e \sin \chi}; \quad v = \frac{1}{e^2 \sin^2 \chi}; \\ \tau_e &= -\frac{2G}{e^2 \sin \chi}; \quad \tau_\chi = -\frac{2G \cos \chi}{e^2 \sin^2 \chi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [D_3] \quad \varphi_1 &= \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}; \\ \varphi &= -\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(e \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \right) = -\ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}; \quad \psi = e; \\ v &= \frac{1}{\sin \chi}; \quad v = \frac{1}{e \sin^2 \chi}; \\ \tau_e &= -\frac{G}{e \sin \chi}; \quad \tau_\chi = -\frac{2G \cos \chi}{e \sin^2 \chi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [H_1] \quad \varphi_1 &= \frac{1}{e^2} \left(\cos \chi \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + 1 \right); \\ \varphi &= \frac{1}{e^2} \left(\cos \chi \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + 1 \right); \\ \psi &= \frac{\sin \chi}{e} \left(-\sin \chi \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + \operatorname{ctg} \chi \right); \\ v &= \frac{1}{e^2} \left(-\sin \chi \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + \operatorname{ctg} \chi \right); \\ v &= \frac{1}{e^3} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + \frac{\cos \chi}{\sin^2 \chi} \right); \\ \tau_e &= -\frac{3G}{e^3} \left(\sin \chi \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + \operatorname{ctg} \chi \right); \\ \tau_\chi &= -\frac{2G}{e^3} \operatorname{ctg}^2 \chi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [T_1] \quad \varphi_1 &= \ln e + \ln(1 + \cos \chi); \\ \varphi &= -\ln e - 1 - \ln(1 + \cos \chi); \\ \psi &= -e \frac{\sin^2 \chi}{1 + \cos \chi}; \\ v &= -\frac{\sin \chi}{1 + \cos \chi}; \quad v = -\frac{1}{e(1 + \cos \chi)}; \\ \tau_e &= G \frac{\sin \chi}{e(1 + \cos \chi)} = \frac{G}{e} \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}; \\ \tau_\chi &= -\frac{G}{e} \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [U_1] \quad \varphi_1 &= \frac{1}{e} \ln e - \frac{1}{e} \ln \sin \chi; \\ \varphi &= -\frac{\partial}{\partial \varrho} (\ln e - \ln \sin \chi) = -\frac{1}{e}; \\ \psi &= -\cos \chi \\ v &= -\frac{1}{e} \operatorname{ctg} \chi; \quad v = -\frac{1 \cos \chi}{e^2 \sin^2 \chi}; \\ \tau_e &= \frac{2G}{e^2} \operatorname{ctg} \chi; \quad \tau_\chi = \frac{G}{e^2} \frac{1 + \cos^2 \chi}{\sin^2 \chi}. \\ [U_3] \quad \varphi_1 &= \ln e + \ln \sin \chi; \\ \varphi &= -\ln e - 1 - \ln \sin \chi; \quad \psi = e \cos e \\ v &= \operatorname{ctg} \chi; \quad v = \frac{1 \cos \chi}{e \sin^2 \chi}; \quad \tau_e = -\frac{G}{e} \operatorname{ctg} \chi; \\ \tau_\chi &= G \sin \chi \cdot \frac{1 - \sin^3 \chi - 2 \sin \chi \cos^2 \chi}{\sin^4 \chi} \\ &= -\frac{G}{e} \frac{1 + \cos^2 \chi}{\sin^2 \chi}. \end{aligned}$$

Inversion von Torsionszuständen.

Wie beim ebenen Spannungsproblem gibt es auch⁴⁾ bei der achsensymmetrischen Torsion die Möglichkeit, eine neue Spannungsverteilung durch Inversion abzuleiten. Bekanntlich erhält man durch die Substitution $\varphi'_1 = e \varphi_1$ aus einer harmonischen Funktion φ_1 eine neue Funktion φ'_1 , die wiederum der Laplaceschen Gleichung genügt, wenn man gleichzeitig die Punkte des Raums durch reziproke Radien abbildet: $e' = \frac{1}{e}$;

$\chi' = \chi$; $\delta' = \delta$. Einer Strömungsfunktion

$$\psi = e \sin \chi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \chi}$$

ordnet sich bei diesem Prozeß die Funktion

$$\psi' = e' \sin \chi \frac{\partial (e \varphi_1)}{\partial \chi} = \sin \chi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \chi} = \frac{\psi}{e} = e' \psi$$

zu, die im invertierten Raum, also rücksichtlich der Koordinaten e, χ, δ wieder die Bedeutung einer Strömungsfunktion hat. Im invertierten Raum gilt daher folgendes, einen Torsionszustand charakterisierendes Formelsystem:

$$\begin{aligned} \psi' &= -e^2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\psi}{e^2} \right); \quad \tau'_e = e^3 \tau_e; \\ \tau'_\chi &= -e^3 \tau_\chi + 3G e \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\psi}{\sin^2 \chi} \right). \end{aligned}$$

1. Bsp. Aus Lösung H_1 ergibt sich durch Inversion folgender Torsionsfall:

$$\begin{aligned} \tau'_e &= -3G \cdot \left[\sin \chi \ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + \operatorname{ctg} \chi \right]; \\ \tau'_\chi &= 2G \operatorname{ctg}^2 \chi + 3G \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left[-\ln \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + \frac{\cos \chi}{\sin^2 \chi} \right] \end{aligned}$$

2. Bsp. Aus Lösung T_1 folgt durch Inversion der Torsionsspannungszustand:

$$\begin{aligned} \tau'_e &= G e^2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}; \\ \tau'_\chi &= G e^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} + 3G e \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{-e}{1 + \cos \chi} \right) \\ &= G e^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} + 3G e \sin \chi \frac{-e \sin \chi}{(1 + \cos \chi)^2} \\ &= G e^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} - 3G e^3 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}. \end{aligned}$$

⁹⁾ Sitzungsberichte der math., phys. Klasse der bayr. Ak. 35 (1905) 249 u. S. 504.

BUCHBESPRECHUNGEN

Herbert Goldstein (Ph.D., Harvard University), *Classical Mechanics*. 309 S. Cambridge (Mass.) 1951. Addison-Wesley Press, Inc., Preis 7,—\$.

Mit dem vorliegenden Buche wendet sich der Verf. vorwiegend an Studierende der theoretischen Physik und Mathematik, wobei der neueste Stand dieses Fachgebietes noch nicht Berücksichtigung findet, sondern der Stoff im wesentlichen nur die klassischen Bestandteile der theoretischen Mechanik umfaßt. Andererseits gewinnt der Leser ein außerordentlich umfangreiches und gut durchgearbeitetes Rüstzeug, das bei der Beschäftigung mit schwierigeren Teilgebieten der modernen theoretischen Physik sehr vorteilhaft ist. Das Buch gliedert sich in folgende Abschnitte: Elementare Grundlagen, Variationsprinzipien und Lagrange'sche Gleichungen, Zwei-Körper-Problem, Kinematik des starren Körpers, Dynamik des starren Körpers, spezielle relativistische Mechanik, die Hamilton'schen Gleichungen, kanonische Transformationen, die Hamilton-Jacobi'sche Theorie, kleine Schwingungen, Lagrange'sche und Hamilton'sche Formulierungen für Kontinua und Felder. Die Darstellung läßt erkennen, daß der Verf. den Stoff vorwiegend von der mathematisch-formalistischen Seite her behandelt, während die physikalische und technische Anwendung mehr im Hintergrund bleibt. So sind auch nur wenige Abbildungen beigelegt. Dennoch sind eine Reihe von Übungsaufgaben angegeben, teilweise auch mit ausführlichen Erläuterungen, sodaß auch der noch ungeübte Leser die Möglichkeit erhält, einzelne Probleme selbständig zu bearbeiten. An vielen Einzelheiten erkennt man, daß der Verf. bemüht gewesen ist, das jeweilige Problem so ausführlich zu formulieren, daß die Anwendung für besondere

Fälle der modernen Physik keine Schwierigkeiten mehr bedeutet. Dies ist z. B. bei der Zentralkraftbewegung bei der Hamilton-Jacobi'schen Theorie und bei der speziellen Relativitätstheorie der Fall. Das Buch kann daher den Studenten und Physikern als zuverlässiges Übungs- und Nachschlagewerk warm empfohlen werden.

Dresden.

H. Neuber.

Dr.-Ing. habil. H. Müller, *Mechanik für Ingenieure*. Bd. 3: Festigkeits- und Elastizitätslehre, 254 S. m. 268 Abb. Braunschweig-Berlin-Hamburg-Kiel 1951. Georg Westermann-Verlag. Preis geh. 16,60 DM., geb. 18,60 DM.

Das vorliegende Buch gehört zur Gruppe der nach dem Kriege in größerer Zahl erschienenen Elementar-Lehrbücher, welche der regen Nachfrage entgegenkamen, die durch die Kriegsverhältnisse und den eingetretenen Mangel an Schrifttum entstanden war. Inzwischen ist aber bereits eine Reihe wertvoller Lehrbücher auf dem Gebiete der Mechanik erschienen. Immerhin zeichnet sich das Buch durch sorgfältige Darstellung und geschickt ausgeführte Abbildungen aus und kann für den Anfänger als gute Stütze dienen. Der Inhalt umfaßt folgende Teilgebiete: Grundbegriffe, einfache Beanspruchungen, zusammengesetzte Beanspruchung, Formänderungen und Formänderungsarbeiten, statisch unbestimmte Systeme. Das Buch enthält zahlreiche einfache Beispiele, die den Leser zum selbständigen Nachrechnen anleiten, wobei sich der Verf. jedoch nur wenig an praktisch vorkommende Fälle anlehnt.

Dresden.

H. Neuber.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

NACHRICHTEN

Zu Prof. Schulers 70. Geburtstag

Am 5. Febr. dieses Jahres beging Prof. Dr.-Ing. Max Schuler, Göttingen, in bester körperlicher und geistiger Frische seinen 70. Geburtstag. Als Prof. Schuler 1947 emeritiert wurde, konnte er auf eine langjährige erfolgreiche Tätigkeit als akademischer Lehrer an der Universität Göttingen und als Leiter des seit 1940 ausgebauten neuen Instituts für angewandte Mechanik zurückblicken, das nachher bekanntlich den dortigen physikalischen Instituten angegliedert worden ist. Der Fachwelt und insbesondere seinen Schülern ist Prof. Schuler ein Begriff durch die seltene Verknüpfung von Wissenschaft und technisch-mechanischer Erfindungskraft, die seiner Arbeit das Gepräge aufdrückt und ihn zweimal zu außergewöhnlichen Erfolgen geführt hat.

In der ersten Phase seiner Laufbahn ging es um die Anwendung des Kreisel zu Zwecken der Navigation und Steuerung. Nach abgeschlossenem Studium an der T. H. München betätigte er sich seit 1907 als Mitarbeiter von Anschütz-Kiel bei der Konstruktion des Kreiselkompasses. Er führte hierbei das Prinzip des 84-Minutenpendels ein, konstruierte 1910 den Einkreiselkompaß, klärte den Schlingerfehler bei Kreiselkompassen auf und schuf schließlich 1912 den verbesserten „Dreikreiselkompaß“. Weitere Erfindungen Schulers aus dieser Zeit sind der Fliegerhorizont und der Wendezeiger für den Blindflug.

Die zweite Phase der Laufbahn Schulers wurde durch seine Habilitation für angewandte Mechanik in Göttingen 1924 eingeleitet. In der Folgezeit wandte er sich dort neben seiner Lehrtätigkeit in Zusammenarbeit mit der Sternwarte dem Problem der Präzisionsmessung von Zeit und Schwere zu. Beginnend mit dem Ausgleichspendel (1929) gelang ihm nochmals in stiller und zäher Arbeit eine Entwicklung, die wie das frühere Beispiel des Kreiselkompasses zeigt, daß die Mechanik auch heute noch zur Zusammenarbeit und zum Wettstreit mit den moderneren Zweigen der Physik fähig ist. Heute besitzt die Wissenschaft in der Schuleruhr ein Hilfsmittel, welches nicht nur die genauesten Zeitmessungen ermöglicht, sondern im Verein mit der Quarzuhr es auch gestattet, die anderen beiden Größen der Pendelgleichung, nämlich Fallbeschleunigung und Pendellänge der genauesten Kontrolle zu unterziehen. Dadurch ist einerseits der Beitrag der Gravitation des Mondes zur Pendelbeschleunigung zutage getreten und sogar die elastische Verformung der Erde durch die Anziehung des Mondes in den Beobachtungsbereich gerückt, andererseits beobachtete Schuler sprunghafte Längenänderungen des Invarstahls für die Pendelstange, die wichtige Folgerungen für das molekulare Verhalten der Invarstähle und anderer Werkstoffe und für deren Verwendung im Vermessungs- und Markscheidewesen erwarten lassen.

Landshut.

H. Gebelein.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher Sammelnummer: 42 55 71. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/32/7. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1207 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. Satz und Druck: Druckerei „Thomas Müntzer“ Langensalza (57 275 4022) (1). Printed in Germany.